МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Методические указания
для студентов по проведению практических занятий

Учебная дисциплина ЕН.01 Элементы высшей математики
(индекс и наименование учебной дисциплины)

Специальность 38.02.07 Банковское дело
(код и наименование специальности)

Согласовано
Советом по методическим вопросам
протокол от 29.08 20 20 г. № 1
Председатель
Е.В. Кужилева

Утверждаю
Зам. директора по УР
Т.В. Трусова
30 августа 20 20 г.

Рассмотрено
УМО математических и общих естественнонаучных дисциплин
Протокол от 29. 08. 20 20 г. № 1
Председатель УМО
О.Н. Поволоцкая

Организация-разработчик: ГБПОУ КК «Новороссийский колледж радиоэлектронного приборостроения» (далее ГБПОУ КК НКРП)

Разработчик:
преподаватель ГБПОУ КК НКРП
(должность, место работы) (подпись) Е.И. Миронова (ФИО)

Рецензенты:
Поволоцкая О.Н., (подпись) преподаватель ГБПОУ КК НКРП (должность, место работы)

Лосева Е.С., (подпись) преподаватель ГБПОУ КК НСПК (должность, место работы)

РЕЦЕНЗИЯ

на методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики, разработанные преподавателем ГБПОУ КК «Новороссийский колледж радиоэлектронного приборостроения» Мироновой Е.И.

Рецензируемые методические указания по выполнению практических занятий учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.07 Банковское дело (утв. приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 05.02.2018 г. № 67, зарегистрирован в Минюст России от 26.02.2018 г. № 50135) и на основе рабочей программы учебной дисциплины (утв. директором колледжа 03.07.2021 г.).

Методические указания включают в себя пояснительную записку, требования по оформлению практических занятий, описания по выполнению каждого практического занятия в соответствии с рабочей программой ЕН.01 Элементы высшей математики.

Практические занятия представлены в логической последовательности, согласно рабочей программе в объеме 34 часов. Дано подробное описание конкретного практического занятия, контрольные вопросы.

Методические рекомендации имеют практическую направленность. Представленные задания включают в себя освоение следующих умений:

- рассматривать профессиональные проблемы, используя математический аппарат;
- умело рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности;
- умение обоснованно и адекватно применять методы и способы решения задач в профессиональной деятельности.

Формируемые в процессе практических занятий умения и навыки могут быть использованы студентами в будущей профессиональной деятельности.

Содержание дисциплины ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей по специальности и овладению следующими компетенциями:

- ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.
- ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
- ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.
- ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

Методические указания могут быть использованы как на учебных занятиях, так и для выполнения обучающимися самостоятельных работ.

Таким образом, методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики способствуют формированию общих и профессиональных компетенций, соответствуют ФГОС среднего профессионального образования по специальности 38.02.07 Банковское дело, рабочей программе учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики и рекомендуются для использования в образовательном процессе ГБПОУ КК НКРП.

Рецензент: ____________ Лосев В.С.

подпись расшифровка

25 08 2020 г.

Аннотация

Методические указания для студентов по проведению практических занятий учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики специальности 38.02.07 Банковское дело включают в себя перечень практических занятий в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины.

Использование методических указаний позволит преподавателю достичь поставленных педагогических целей, а обучающимся сформировать умения в соответствии с ФГОС СПО по специальности 38.02.07 Банковское дело: умение ясно, четко, однозначно излагать математические факты, а также рассматривать профессиональные проблемы, используя математический аппарат, умение обоснованно и адекватно применять методы и способы решения задач в профессиональной деятельности.

Содержание

Требования к оформлению практических занятий

При выполнении практического задания и его оформления необходимо соблюдать следующие правила:

- работа оформляется в тетради для практических занятий;
- решение задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях;
- решение задач надо оформлять аккуратно, подробно объясняя все действия и используемые формулы;
- после получения проверенной преподавателем работы, студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты;
- в случае незачета студент должен в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя и представить работу на повторную проверку.

Зачет по каждому практическому занятию студент получает после её выполнения и предоставления преподавателю на проверку, оформленного отчета, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия №_1_

Вычисление пределов функции

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: закрепить понятие предела и навыки вычисления предела функции в точке и на бесконечности, научиться исследовать функцию на непрерывность в точке.
Оборудование: тетрадь для практических работ, ручка.

Краткие теоретические сведения

Определение предела функции в точке
Число А называется пределом функции *f(x)* при *x* стремящимся к *a*, если для любого ε>0 можно указать δ>0, что для любого $x \neq a$, удовлетворяющего неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} (x)^{\square} = A$

Теоремы о пределах:

1. Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если последние существуют.
2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют.
3. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.
4. Предел постоянной функции равен этой же постоянной.
5. Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля.
6. Теорема о единственности предела: Функция не может иметь двух разных пределов в точке.

Формулы замечательных пределов: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Функция *f(x)*, $x \epsilon (a;b)$ называется непрерывной в точке $x_0 \epsilon (a;b)$, если предел функции *f(x)* в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f¿¿x_0)$

Согласно определению непрерывности функций *f(x)* в точке x_0 – это означает выполняемость следующих условий:
а) функция *f(x)*, должна быть определена в точке x_0;
б) у функции *f(x)* должен существовать предел в точке x_0;
в) предел функции *f(x)* в точке x_0 совпадает со значением функции в этой точке;
Примеры:
Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (9x^2 - 6x - 5) = \lim\limits_{x \to 2} 9x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 6x - \lim\limits_{x \to 2} 5 = 36 - 12 - 5 = 19$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim\limits_{x - 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x-3) = 2 - 3 = -1$

3) $\lim\limits_{x \to 81} \frac{x - 81}{\sqrt{x} - 9} = \lim\limits_{x \to 81} \frac{(\sqrt{x} - 9)(\sqrt{x} + 9)}{\sqrt{x} - 9} = \lim\limits_{x \to 81} (\sqrt{x} + 9) = 18$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+21}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+21)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)}=\frac{4-2+21}{2-4}=\frac{23}{-2}=-11.5$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2-8}{12-2x^2-3x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^3}}{\frac{12}{x^3}-\frac{2}{x}-3}=\frac{-7}{3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^3}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{x^3}=0.$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}$ ¿ $=0$

¿

7) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-9x+20}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-3}{x-5}=\frac{4-3}{4-5}=-1$

8) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)=3$

Практическая часть

Вариант 1

1.Вычислить предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(8x^2+2-5)$; *2.*$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-10x+21}{x-7}$; *3.* $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; *4.*$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+5}$; *5.*$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2}-x$; *6.* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2-1}{12-x^2-x^3}$; *7.*$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x}{2x+3}$; *8.* $\lim\limits_{x\to -1}(4x-x^3)$; *9.*$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-8}{4x+2}$; *10.*$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$

2.Исследовать на непрерывность в точке $x_0=1$ функцию

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\, при\, x\geq 1,\\ x\, при\, x<1\end{cases}$ и построить график.

Вариант2

1.Вычислить предел функции:

1.$\lim\limits_{x\to 1}(9x^2+3x-6)$; *2.*$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+22}{x-5}$; *3.*$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; *4.*$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^2+6}$; *5.*$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3}-x$; *6.* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-x^2-1}{13-x^2-2x^3}$; *7.*$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-4x}{2x+3}$; *8.* $\lim\limits_{x\to -1}(5x-2x^3)$; *9.*$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-8}{4x+2}$; *10.*$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;

2.Исследовать на непрерывность в точке $x_0=1$ функцию

$f(x)=\frac{1}{3-x},\ x\in R, x\neq 3$ и построить график.

Вариант3

1.Вычислить предел функции:

1.$\lim_{x\to 1}\left(10x^2+4x-6\right)$; *2.*$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x+22}{2x-5}$; *3.*$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{x^2+6}$; *4.*$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-12}{x^2+6}$; *5.*$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+4}-x$; *6.* $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-x^2-1}{14-x^2-2x^3}$; *7.*$\lim_{x\to\infty}\frac{12-4x}{5x+3}$;

8.$\lim_{x\to -1}\left(6x-3x^3\right)$; *9.*$\lim_{x\to 2}\frac{x-9}{3x+2}$; *10.*$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5x+6}{x^2+10+21}$;

2.Исследовать на непрерывность в точке x_0=1 функцию

$f(x)=\frac{1}{3-x}$, $x\in R, x\neq -3$ и построить график.

Вариант4

1.Вычислить предел функции:

1.$\lim_{x\to 1}\left(11x^2+4x-16\right)$; 2.$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x+22}{2x-15}$; 3. $\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$; 4.$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+12}{x^2+6}$; 5.$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5}-x$; 6. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-x^2-11}{14-x^2-2x^3}$; 7.$\lim_{x\to\infty}\frac{14-5x}{5x+3}$;

8.$\lim_{x\to -1}\left(8x-2x^2\right)$; 9.$\lim_{x\to 2}\frac{2x-9}{4x+2}$; 10. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-8}$;

2.Исследовать на непрерывность в точке x_0=1 функцию

$f(x)=\frac{1}{2-x}$, $x\in R, x\neq 2$ и построить график.

Вариант5

1.Вычислить предел функции:

1.$\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x-5\right)$; 2.3. $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$; 4.$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+18}{2x^2+6}$;

5.$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+6}-x$; 6.$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-x^2-15}{15-x^2-4x^3}$; 7.$\lim_{x\to\infty}\frac{16-5x}{4x+3}$;

8.$\lim_{x\to 3}\left(8x-x^3\right)$; 9.$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; 10.$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^3-8}$;

2.Исследовать на непрерывность в точке x_0=1 функцию

$f(x)=\frac{1}{2+x}$, $x\in R, x\neq -2$ и построить график.

Вариант6

1.Какая функция называется непрерывной в точке?

2.Вычислить предел функции:

1.$\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+6x-5\right)$; 2.3. $\lim\limits_{x\to 36}\frac{x-36}{\sqrt{x}-6}$; 4.$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2+18}{5x^2+16}$;

5.$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+7}-x$; 6.$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x^2-x^2-16}{16-3x^2-4x^3}$; 7.$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16-5x}{8x+13}$;

8.$\lim\limits_{x\to 3}\left(10x-4x^3\right)$; 9.$\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$; 10.$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+5x-6}{x^3-8}$;

2.Исследовать на непрерывность в точке $x_0=1$ функцию

$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}\ при\ x\geq 1,\\ x\ при\ x<1\end{cases}$ и построить график.

Контрольные вопросы

1. Что называется пределом функции?
2. Какая функция называется непрерывной в точке?
3. Сформулируйте теорему о единственности предела.
4. Сформулируйте теорему о пределе суммы двух функций.
5. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух функций.

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:
- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия №_2_

Нахождение производных элементарных функций

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: закрепить знание табличных значений производных элементарных функций, правила дифференцирования функций.

Оборудование: тетрадь для практических работ, таблица производных, ручка

Краткие теоретические сведения

Основные правила дифференцирования

Производная алгебраической суммы функций

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'$$

Производная произведения двух функций

$$(uv)'=u'v+uv'$$

Производная частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Производная произведения постоянной на функцию

$$(Cu)'=Cu'$$

Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная функции
$y=x^n$	$y'=n x^{n-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=tg\,x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=ctg\,x$	$y'=\frac{-1}{\sin^2 x}$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=arctg\,x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=arcctg\,x$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=a^x$	$y'=a^x \ln x$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$

Примеры вычисления производных

1. $y=\frac{x^7-x}{x^3+x^2}$; $y'=\frac{(7x^6-1)(x^3+x^2)-(3x^2+2x)(x^7-x)}{(x^3+x^2)^2}$

2. $y=e^x-tgx$; $y'=e^x-\frac{1}{\cos^2 x}$

3. $y=\ln X+7^x$; $y'=\frac{1}{x}+7^x\ln 7$

4. $y=\sqrt[5]{x}$; $y'=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}$

Практическая часть

Вариант 1

1.Найти производную функции:

1) $y=2x^4-x^3+3x+4$; 2) $y=-x^5+2x^3-3x^2-1$;

3) $y=6\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}$; 4) $y=\frac{2}{x^3}-8\sqrt[4]{x}$; 5) $y=(2x+3)^8$;

6) $y=e^x-\sin x$; 7) $y=\cos x-\ln x$; 8) $y=x^2\cos x$;

9) $y=\frac{x^3+1}{x^2+1}$; 10) $y=8^{\cos x}$.

2.Найти значение производной функции $f(x)$ в заданной точке:

$f(x)=\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}, x=\frac{\pi}{6}$.

3.Найти значение x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно ; отрицательно:

$$f(x)=2x^3-x^2$$

Вариант 2

1.Найти производную функции:

1) $y=3x^4-4x^3+x+14$; 2) $y=-2x^5+3x^3-4x^2-10$;

3) $y=5\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^2}$; 4) $y=\frac{1}{x^3}-7\sqrt[4]{x}$; 5) $y=(3x+4)^8$;

6) $y=\sin x-\sqrt[3]{x}$; 7) $y=\sin 5x+\cos(2x-3)$; 8) $y=x^2\sin x$;

9) $y=\frac{x^2}{x^3+1}$; 10) $y=2^{\cos x}$.

2.Найти значение производной функции $f(x)$ в заданной точке:

$f(x)=e^x\ln x, x=1$.

3.Найти значение x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно ; отрицательно:

$$f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4.$$

Вариант 3

1.Найти производную функции:

1) $y = 5x^4 - x^3 + x + 1$; 2) $y = -3x^5 + 3x^3 - 8x^2 - 2$;

3) $y = 6x^4 - 9e^x$; 4) $y = \frac{5}{x} + 4e^x$; 5) $y = (4 - 3x)^7$;

6) $y = \sin(x¿ - 3) - \ln(1 - 2x)¿$; 7) $y = e^{2x} - \ln 3x$; 8) $y = x^2 \sin 2x$;

9) $y = \frac{x}{x^3 + 1}$; 10) $y = 3^{\cos x}$.

2.Найти значение производной функции $f(x)$ в заданной точке:

$f(x) = \frac{2\cos x}{\sin x}, x = \frac{\pi}{4}$.

3.Найти значение x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно ; отрицательно:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$$

Вариант 4

1.Найти производную функции:

1) $y = 6x^4 - 2x^3 + 3x + 4$; 2) $y = -8x^5 - 3x^3 - 6x^2 - 12$;

3) $y = x^4 - 9e^{2-x}$; 4) $y = \frac{6}{x} + 4e^{3x+1}$; 5) $y = (4 - 5x)^7$;

6) $y = \sin(2x¿ - 3) - \ln(3 - 2x)¿$; 7) $y = e^{3x} - \ln 2x$; 8) $y = x^2 \sin 3x$;

9) $y = \frac{2x}{x^3 + 1}$; 10) $y = 4^{\cos x}$.

2.Найти значение производной функции $f(x)$ в заданной точке:

$f(x)=\frac{3\cos x}{\sin x}, x=\frac{\pi}{3}$.

3.Найти значение x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно ; отрицательно:

$$f(x)=1+4x-x^2$$

Вариант 5

1.Найти производную функции:

$1) y=6x^4+\frac{1}{3}x^3+3x+20;$ $2) y=\frac{-4}{5}x^5-3x^3-6x^2-11$;

$3) y=\frac{1}{4}x^4-2e^{2-3x};$ $4) y=\frac{7}{x}+3e^{3x+1}$; $5) y=(1-5x)^6$;

$6) y=2\sin(x¿-4)-\ln(2+2x)¿;$ $7) y=2e^{3x}-3\ln 2x;$ $8) y=x^3\sin 5x$;

$9) y=\frac{3x}{x^3+1}$; $10) y=5^{\cos x}$.

2.Найти значение производной функции $f(x)$ в заданной точке:

$f(x)=\frac{4\cos x}{\sin x}, x=\frac{\pi}{6}$.

3.Найти значение x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно ; отрицательно:

$$f(x)=3+x^2-6x \; .$$

Вариант 6

1.Найти производную функции:

$1) y=\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+3x+\frac{1}{2};$ $2) y=\frac{-3}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3-6x^2-9$;

$3) y=\frac{1}{8}x^4-4e^{5-3x};$ $4) y=\frac{8}{x}+2e^{3x+3}$; $5) y=(7-6x)^5$;

6) $y=3\sin\left(2x\text{¿}-4\right)-4\ln\left(2+2x\right)\text{¿}$; 7) $y=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}\ln 2x$; 8) $y=x^4\sin 3x$;

9) $y=\frac{4x}{x^2+3}$; 10) $y=6^{\cos x}$.

2.Найти значение производной функции $f\left(x\right)$ в заданной точке:

$f\left(x\right)=5\,tg\,x,\ x=\frac{\pi}{6}$.

3.Найти значение x, при которых значение производной функции $f\left(x\right)$ равно нулю; положительно ; отрицательно:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4-x^2+5.$$

Контрольные вопросы

1.Сформулируйтетеорему о производной логарифмической функции.
2.Сформулируйтетеорему о производной степенной функции.
3.Сформулируйтетеорему о производной показательной функции.
4.Сформулируйте теорему о производной синуса.
5.Сформулируйте теорему о производной косинуса.
6.Сформулируйте теорему о производной тангенса.
7.Сформулируйте теорему о производной котангенса.

Содержание отчет

Отчет о проделанной работе должен включать:
- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 3

Производная сложной функции и производная
обратных тригонометрических функций

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: научить вычислять производную сложной функции и производную обратных тригонометрических функций

Оборудование: тетрадь производных, тетрадь для практических работ, ручка

Краткие теоретические сведения

Основные правила дифференцирования

Производная алгебраической суммы функций

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'$$

Производная произведения двух функций

$$(uv)'=u'v+uv'$$

Производная частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Производная произведения постоянной на функцию

$$(Cu)'=Cu'$$

Определение. Для любых данных функции $y=f(h)$ и $h=f(x)$функция, заданная формулой $y=f(g(x))$, называется сложной (или композицией), составленной из функций f и g. Например, функция $y=3lg(1+x^2)$ состоит из двух функций $y=3lg\,h, h=1+x^2$.Подобным же образом можно рассматривать сложные функции, являющиеся композицией более чем двух функций.

Теорема. Если же функция$h=g(x)$имеет производную в точке x_0, а Функция$y=f(h)$имеет производную в точке h_0, то сложная функция $y=f(g(x))$имеет производную в точке x_0, которая выражается по формуле

$$y'(x_0)=f'(h_0)\,g'(x_0)$$

Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная функции
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$

$y=tg\,x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=ctg\,x$	$y'=\frac{-1}{\sin^2 x}$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=arctg\,x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=arcctg\,x$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=a^x$	$y'=a^x \ln x$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$

Пример:

Найти значение производной в заданной точке:

1) $y=\left(x^2+3x+10\right)^2;\ y'=2\left(x^2+3x+10\right)\left(x^2+3x+10\right)'=\text{¿}$

$$\text{¿}2\left(x^2+3x+10\right)\left(2x+3\right).$$

2) $y=5\arcsin x-3\arccos x;\ y'=\frac{5}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{8}{\sqrt{1-x^2}};$

$$y'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{8}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=16$$

3) $y=lg\left(7x^5+3x\right);\ y'=\frac{\left(7x^5+3x\right)}{\ln 10\left(7x^5+3x\right)}=\frac{35x^4+3}{\ln 10\left(7x^5+3x\right)}$

Практическая часть

Вариант 1

1.Вычислить производные:

1) $y=\sqrt{x^2+3x+4}$ 2) $y=(23+15x+x^3)^2$ 3) $y=\left(\frac{1+x}{x^2-x}\right)^2$;

4) $y=lg(3x^2+x+4)$; 5) $y=\frac{1}{\sqrt{3-lg\,x}}$;6) $y=arc\sin x$; 7) $y=\arccos 2x$;

9) $y=arctg\sqrt{x}$; 10) $y=arcctg\,3x$.

2.Вычислить значение производной в заданной точке:

$$f(x)=\sin^2 x\ln e^x, f'(0)$$

Вариант 2

1.Вычислить производные:

1) $y=3\sqrt{2x^2-x+4}$ 2) $y=(3+5x+x^3)^2$ 3) $y=\left(\frac{2+x}{x^2-x}\right)^3$;

4) $y=lg(2x^2+3x+4)$; 5) $y=\frac{1}{\sqrt{3-lg\,2x}}$;6) $y=3\,arc\sin 2x$;

7) $y=2\arccos 0{,}2x$;

9) $y=arctg\sqrt{2x}$; 10) $y=arcctg\,2x$.

2.Вычислить значение производной в заданной точке:

$$f(x)=3\ln\sqrt{\cos 2x}, f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Вариант 3

1.Вычислить производные:

1) $y=\sin 3x$ 2) $y=\sin x\cos x$ 3) $y=\sqrt{\cos x^3}$; 4) $y=2\sqrt{x^2-x+5}$;

5) $y=lg(x^2+x+1)$;6) $y=3\,arc\sin\sqrt{2x}$; 7) $y=\arcsin x+\arccos x$;

8) $y=\arcsin x^2$;9) $y=arctg\sqrt{x}+2x$; 10) $y=arcctg\frac{x}{2}$.

2.Вычислить значение производной в заданной точке:

$$f(x)=\ln tg^2 2x, f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Вариант 4

1.Вычислить производные:

1) $y=\sin 4x$ 2) $y=4\sin x\cos x$;3) $y=2\sqrt{\cos 3x^3}$;

4) $y=5\sqrt{4x^2+x+6}$; 5) $y=\log_2(x^2+x+1)$;6) $y=4\,arc\sin\sqrt{2x-1}$;

7) $y=2\,arc\sin x+3\arccos x$; 8) $y=5\arcsin x^2$;

9) $y=2\,arctg\sqrt{x}+3x$; 10) $y=arcctg\dfrac{1+x}{1-x}$.

2.Вычислить значение производной в заданной точке:

$$f(x)=2\ln\sqrt{\sin 2x},\ f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Вариант 5

1.Вычислить производные:

1) $y=2\sin 5x$ 2) $y=8\sin 2x\cos 2x$ 3) $y=2\sqrt{\cos x^4}$;

4) $y=\sqrt{4x^2+6}$; 5) $y=\log_3(2x^2+x+3)$;6) $y=arc\sin\sqrt{2x+3}$;

7) $y=2\,arc\sin x+3\,arctg\,x$; 8) $y=2\arcsin x^3$;

9) $y=3\,arctg\sqrt{2x}+x$; 10) $y=2\,arcctg\dfrac{1+x}{1-x}$.

2.Вычислить значение производной в заданной точке:

$$f(x)=\arccos\sqrt{x},\ f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

Вариант 6

1.Вычислить производные:

1) $y=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\sin x$ 2) $y=\ln ctg\,x$ 3) $y=3\sqrt{\cos x^5}$;

4) $y=2\sqrt{8x^2+6}$; 5) $y=\log_4(x^2+x+4)$;6) $y=2\,arc\sin\sqrt{x+3}$;

7) $y=\dfrac{1}{3}arc\sin x+3\,arctg\,x$; 8) $y=2\arcsin x^4$;

9) $y=5\,arctg\sqrt{x}+2x$; 10) $y=3\,arcctg\dfrac{2+3x}{1-2x}$.

2.Вычислить значение производной в заданной точке:

$f(x)=8\sin^2 x\cos x,\ f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Контрольные вопросы

1.Какую функцию называют сложной?

2.Приведите примеры сложной функции.

3.Сформулируйте теорему о производной сложной функции.

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 4

Нахождение производных высших порядков

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: научиться находить производные высших порядков

Оборудование: тетрадь для практических работ, таблица производных, ручка

Краткие теоретические сведения

Пусть $f'(x)$есть производная от функции $f(x)$), тогда производная от функции $f'(x)$называется второй производной от функции$f(x)$и обозначается $f''(x)$. Вторая производная называется также производной второго порядка. Функцию$f'(x)$называют производной первого порядка или первой производной. Производная от второй производной называется третьей производной функции$f(x)$или производной третьего порядка и обозначается $f'''(x)$. Таким же образом определяется производная четвертого порядка и т.д. Производная -го порядка обозначается $f^n(x)$.

Пример 1. Найти последовательные производные от функции $f(x)=x^4$.

Решение.$f'(x)=4x^3, f''(x)=12, f'''(x)=24x, f^{IV}(x)=24, f^V(x)=0.$

Дальнейшие производные тоже равны нулю.

Пример 2. Найти последовательные производные от функции$f(x)=\sin x$.

Решение.$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), f''(x)=-\sin x=\sin(\pi+x),$

$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),\ldots, f^n(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Практическая часть

Вариант 1

1.Найти последовательные производные от функции $f(x)=2x^4-3x^2$

2.Найти вторую производную функции $f(x)=xe^{-x}$.

3.Найти третью производную функции$f(x)=\frac{x+1}{x+3}$

4.Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3-2t^2-4$(s-в метрах,t-в секундах). Найдите ускорение точки в конце 2-й секунды.

Вариант 2

1.Найти последовательные производные от функции $f(x)=2x^4-3x^2$

2.Найти вторую производную функции $f(x)=e^{-x^2}$

3.Найти третью производную функции $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$

4.Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3-2t^2+4$(s-в метрах, t в секундах). Найдите ускорение точки в конце 3-й секунды.

Вариант 3

1.Найти последовательные производные от функции $f(x)=3x^4-2x^2+5x$

2.Найти вторую производную функции $f(x)=\sin 2x$

3.Найти третью производную функции $f(x)=\ln x$

4.Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3+2t^2-4$(s-в метрах, t в секундах). Найдите ускорение точки в конце 4-й секунды.

Вариант 4

1.Найти последовательные производные от функции $f(x)=2x^5-3x^2+2$

2.Найти вторую производную функции $f(x)=\cos 3x$

3.Найти третью производную функции $f(x)=\frac{x+4}{x+5}$

4.Точка движется прямолинейно по закону $s=3t^3+2t^2+1$(s-в метрах, t в секундах). Найдите ускорение точки в конце 2-й секунды.

Вариант 5

1.Найти последовательные производные от функции $f(x)=2x^4+3x^2$

2.Найти вторую производную функции $f(x)=x+\sqrt[3]{x^5}-2$

3.Найти третью производную функции $f(x)=\frac{2x+1}{x+3}$

4.Точка движется прямолинейно по закону $s=t^3-2t^2+5$(s-в метрах, t-в секундах). Найдите ускорение точки в конце 2-й секунды.

Вариант 6

1.Найти последовательные производные от функции $f(x)=2x^4-3x^2-6x$

2.Найти вторую производную функции $f(x)=\sqrt{2x+3}$

3.Найти третью производную функции $f(x)=\frac{3x-1}{x+3}$

4.Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3+2t^2+3$ (s-в метрах, t- в секундах). Найдите ускорение точки в конце 3-й секунды.

Контрольные вопросы

1. Что называется производной 3-го порядка и как её найти?
2. Что называется дифференциалом функции?
3. В чём состоит геометрический смысл 2-ой производной?
4. В чём состоит механический смысл 2-ой производной?
5. Как находить производную сложной функции?

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 5

Нахождение экстремумов функции и точек перегиба графика функции

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: закрепить понятие экстремума функции и точек перегиба, научить вычислять экстремумы функции и определять точки перегиба.
Оборудование: тетрадь для практических работ, таблица производных, ручка

Краткие теоретические сведения:

Правило нахождения экстремумов функции с помощью производной:

1.Найти производную функции.

2.Найти критические точки функции, т.е. точки, в которых производная функции обращается в нуль или терпит разрыв.

3.Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции. При этом критическая точка является точкой минимума, если производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс, и точкой максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой, знак производной не меняется, то в этой точке функция экстремума не имеет.

Правило нахождения точек перегиба.

1.Найти вторую производную.

2.Найти критические точки функции, в которых вторая производная равна нулю или терпит разрыв.

3.Исследовать знак второй производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции. Если при этом критическая точка разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то она является абсциссой точки перегиба функции.

Пример. Исследовать на экстремум и точки перегиба функцию:

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-8$$

$f'(x)=6x^2-18x+12; 6x^2-18x+12=0; x=1; x=2.$

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$f\,max=-3;\ f\,min=-4.$

x	$-\infty < x < 1{,}5$	1,5	$1{,}5 < x < \infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	Выпуклость вниз	Точка перегиба	Выпуклость вверх

$f''(x)12x-18; 12\%-18=0; x=1{,}5.$

Практическая часть

Вариант 1

1. Найти критические точки функции $f(x)=x^2+3x$
2. Исследуйте на экстремум функцию $f(x)=x^2-x$
3. Найти точки перегиба функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

Вариант 2

1. Найти критические точки функции $f(x)=-x^2+2x$
2. Исследуйте на экстремум функцию$f(x)=-x^2-x$
3. Найти точки перегиба функции$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$

Вариант 3

1. Найти критические точки функции $f(x)=x^2-x+12$
2. Исследуйте на экстремум функцию $f(x)=x^2-4x+3$
3. Найти точки перегиба функции $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$

Вариант 4

1. Найти критические точки функции $f(x)=x^2-10x+9$
2. Исследуйте на экстремум функцию$f(x)=-x^2+2x+3$
3. Найти точки перегиба функции $f(x)=2x^3+9x^2+12x-2$

Вариант 5

1. Найти критические точки функции $f(x)=-x^2-x+6$
2. Исследуйте на экстремум функцию $f(x)=-2x^2+x+1$
3. Найти точки перегиба функции $f(x)=x^4-2x^3+6x-4$

Вариант 6

1. Найти критические точки функции $f(x)=2x^2-8x$
2. Исследуйте на экстремум функцию $f(x)=x^2+5x+4$
3. Найти точки перегиба функции $f(x)=x^3-x$

Контрольные вопросы

1.Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.

2.Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.

3.Какая точка называется точкой минимума функции?

4.Какая точка называется точкой максимума функции?

5.Какие точки называются стационарными?

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 6

Исследование функции по общей схеме

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: закрепить умения и навыки исследования функции по общей схеме и построения графика.
Оборудование: тетрадь для практических работ, таблица производных, ручка, линейка, карандаш.

Краткие теоретические сведения

Общая схема построения графиков функций
1.Найти область определения функции.
2.Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3.Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4.Найти асимптоты графика функции.
5.Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы.
6.Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
Пример. Построить график функции $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$
1.Область определения функции: (—∞; —1) и (—1; 1) U (1; +∞)
2.Функция $f(x)$ - нечетная, так как $f(-x)$ = $f(x)$. Поэтому для построения графика функции достаточно исследовать её для x ≥ 0.
3.Функция непериодическая.
4.График функции пересекает оси координат только в точке (0;0).
5.Точки -1, 0, 1 разбивают числовую прямую на четыре интервала: (—оо; — 1), (— 1; 0), (0; 1), (1;+∞). Найдем знаки функции лишь в интервалах (0; 1), (1; +∞).
$f(x)$< 0 при всех x ∈ (0; 1), $f(x)$ > 0 при всех x ∈ (1; +∞). В силу нечетности данной функции имеем $f(x)$< 0 при всех x ∈ (—∞; —1),
$f(x)$ > 0 при всех x ∈(-1; 0).
6.Прямые $x=$ ±1 - являются вертикальными асимптотами. Прямая $y=x$ является наклонной асимптотой.
7.Найдем производную $f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ Она существует во всех точках числовой прямой, $x=\mp 1$, и равна нулю в точках $x=0$; $x=\pm\sqrt{3}$. Поэтому критическими точками функции являются $x=-\sqrt{3}$; $x=-1$;

$x=0\,;x=1\,;x=\sqrt{3}.$

Изучим поведение $f'(x)$ в окрестности каждой критической точки. Впоследствии нечетности $f(x)$ достаточно рассмотреть знак $f'(x)$ на промежутках (-1; 0), (0; 1), (l; $\sqrt{3}$); ($\sqrt{3};\infty$).

Результаты исследования занесем в таблицу:

X	-1 < x < 0	x = 0	0 < x < 1	1 < x < $\sqrt{3}$	$x=\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ < x
$f'(x)$	-	0	-	-	0	+
$f(x)$	убывает	Нет экстремума	убывает	убывает	Минимум $(3\sqrt{3})/2$	возрастае

В точках x = —1; x = 1 функция не имеет экстремума, поскольку эти точки не принадлежат области определения функции. В силе нечетности функции можно утверждать, что при x = —$\sqrt{3}$ данная функция имеет максимум.

8. Чтобы исследовать график функции на выпуклость, найдем вторую производную $f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ и критические точки данной функции (по второй производной) $f''(x)=0$ при x = 0 и $f''(x)$ не существует при $x=\mp 1$.Однако точки $x=\mp 1$ не принадлежат области определения функции, поэтому точка перегиба может быть только в точке x = 0.

Исследуем знаки второй производной и результаты исследования занесем в таблицу:

X	x < -1	-1 < x < 0	x = 0	0 < x < 1	X > 1
$f''(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	Выпуклость вверх	Выпуклость вниз	Точка перегиба	Выпуклость вверх	Выпуклос вниз

На основе проведенного исследования функции строим её график.

Практическая часть

Вариант 1

Исследуйте функцию и постройте её график: y — x^3 + 6x^2 + 9x 4- 8.

Вариант 2

Исследуйте функцию и постройте её график: y = 2x^3 — 3x^2 — 12x — 1.

Вариант 3

Исследуйте функцию и постройте её график: $y = x^3 - 6x^2 + 16$

Вариант 4

Исследуйте функцию и постройте её график: $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

Вариант 5

Исследуйте функцию и постройте её график: $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

Вариант 6

Исследуйте функцию и постройте её график: $y = -x^4 + 8x^2 + 9$.

Контрольные вопросы

1. Определение четной функции.
2. Определение нечетной функции.
3. Что называется экстремумом функции?
4. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
5. Сформулируйте достаточное условие существования точек перегиба.

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия №_7_

Непосредственное интегрирование.
Замена переменной в неопределённом интеграле

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: закрепить навыки вычисления неопределенного интеграла непосредственным интегрированием и с помощью замены переменной.
Оборудование: тетрадь для практических работ, таблица первообразных, ручка

Краткие теоретические сведения

Определение. Любая первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx\ .$$

Методом непосредственного интегрирования называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным благодаря использованию основных свойств неопределенных интегралов. Для этого подынтегральную функцию обычно предварительно соответствующим образом преобразуют.

Таблица первообразных

Функция	Первообразная
$x^p,\ p\neq 1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+c$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x+c$
e^x	e^x+c
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$(kx+b)^p,\ p\neq 1,\ k\neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+c$
$\frac{1}{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\ln(kx+b)+c$
$e^{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+c$
$\sin(kx+b),\ k\neq 0$	$\frac{-1}{k}\cos(kx+b)+c$
$\cos(kx+b),\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+c$

Примеры.

1. $\int \frac{3\,dx}{2\sqrt[5]{x^4}}=\int \frac{3}{2}x^{\frac{-4}{5}}dx=\frac{3}{2}\int x^{\frac{-4}{5}}dx=\frac{15}{2}\sqrt[5]{x}+c$

2. $\int \frac{(1+x)^2dx}{x(1+x^2)}=\int \frac{(1+2x+x^2)dx}{x(1+x^2)}=\int \frac{(1+x^2)dx}{x(1+x^2)}+\int \frac{2x\,dx}{x(1+x^2)}=¿¿$

$¿\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{dx}{1+x^2}=\ln|x|+2\,arctgx+c$

$3.\int \frac{dx}{x^4+x^2}=\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}=\int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{x^2(x^2+1)}=\int \frac{(1+x^2)dx}{x^2(x^2+1)}-\int \frac{x^2dx}{x^2(x^2+1)}=¿¿$

$\int \frac{dx}{x^2}-\int \frac{dx}{x^2+1}=\frac{-1}{x}-arctgx+c$

$4.\int \frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$ Замена $x=t^2, dx=2tdt$.

$5.\int \frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}=\int \frac{\sin t}{t}2tdt=2\int \sin tdt=-2\cos t+c=-2\cos\sqrt{x}+c$

$6.\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ Замена:$t=e^x, e^{-x}=\frac{1}{t}, dt=e^x dx, dx=\frac{dx}{e^x}$

$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{dx}{t(t+t^{-1})}=\int \frac{dt}{t^2+1}=arctgt+c=arctg\,e^x+c$

$7.\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$ Замена: $\ln 4x=t; dt=\frac{dx}{x}$

$\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx=\int \frac{\ln\frac{4x}{2}}{x\ln 4x}dx=\int \frac{\ln 4x-\ln 2}{x\ln 4x}dx=\int \frac{t-\ln 2}{t}dt=\int dt-\ln 2\int \frac{dt}{t}=t-¿$

$-\ln 2\ln|t|+c=\ln 4x-\ln 2\ln|4x|+c$

$8.\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$ Замена: $t=1+e^x, e^x=t-1; dt=e^x dx, dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t-1}$

$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}=\int \frac{(t-1)^2dt}{\sqrt[4]{t}(t-1)}=\int \frac{(t-1)dt}{\sqrt[4]{t}}=\int \left(t^{\frac{3}{4}}-t^{\frac{-1}{4}}\right)dt=\frac{4}{7}t^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}+c$

$9.\int (x\sqrt{3-x})dx$ Замена: $t=\sqrt{3-x}, 3-x=t^2, x=3-t^2, dx=-2tdt$.

$\int (x\sqrt{t-3})dx=\int t(3-t^2)(-2tdt)=\int (-6t^2+2t^4)dt=¿¿$

$¿-6\int t^2dt+2\int t^4dt=-2t^3+\frac{2}{5}t^5+c=2(3-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}}+c$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(\frac{1}{9}-x^2)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}} + c = \frac{1}{3}\arcsin 3x + c$

11. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ Замена: $t=1-x^2,\, dt=-2xdx,\, xdx=\frac{-dt}{2}$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int \sqrt{t}\left(\frac{-dt}{2}\right)=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=\frac{-1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

12. $\int \frac{x^2dx}{4+3x^2}$ Замена: $t=4+3x^2$

$\int \frac{x^2dx}{4+3x^3}=\frac{1}{9}\int\frac{d(4+3x^3)}{4+3x^3}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{9}\ln|t|+c=\frac{1}{9}\ln|4+3x^3|+c$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}\; 11+10x-x^2=36-(x-5)^2, \textit{Замена}: t=x-5$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}=\int\frac{d(x-5)}{\sqrt{6^2-(x-5)^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{6^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{6}+c=\arcsin\frac{x-5}{6}+c$

15. $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ Замена: $x=2\sin t, |t|\le\frac{\pi}{2}; dx=2\cos t dt; t=\arcsin\frac{x}{2};$

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cos t.$

$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int 2\cos t\cdot 2\cos t dt=4\int\cos^2 t dt=2\int \text{¿¿¿¿¿¿¿}$

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2};$$

$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+c$.

Практическая часть

Вариант 1

1.Вычислить неопределенный интеграл:

$1\text{¿}\int 5\,dx; 2\text{¿}\int 6x^2dx; 3\text{¿}\int 4(x^2-x+3)dx; 4\text{¿}\int x^{-4}dx; 5\text{¿}\int\frac{3dx}{x}; \text{¿¿¿}$

$6\text{¿}\int\frac{5dx}{\cos^2 x}; 7\text{¿}\int\frac{3dx}{\sin^2 x}; 8\text{¿}\int 5^x dx; 9\text{¿}\int e^x dx; 10\text{¿}\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x}}; 11\text{¿}\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}; \text{¿¿¿¿¿}$

$12\text{¿}\int x\sqrt{2-x^2}dx; 13\text{¿}\int\frac{x^2dx}{5+2x^3}; 14\text{¿¿¿}\int\frac{dx}{\sqrt{21+4x-x^2}}.$

Вариант 2

1.Вычислить неопределенный интеграл:

$1¿\int 3dx;2¿\int 5x^3dx;3¿\int 2\left(x^2-2x+3\right)dx;4¿\int x^{-5}dx;5¿\int \frac{dx}{x};¿¿¿¿$

$6¿\int \frac{2dx}{\cos^2 x};7¿\int \frac{4dx}{\sin^2 x};8¿\int 2^x dx;9¿\int e^{2x}dx;10¿\int \sqrt{e^x-1}dx;11¿\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}};¿¿¿¿¿$

$12¿\int x\sqrt{3-x^2dx};13¿\int \frac{x^2dx}{1+2x^3};14¿\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.¿¿$

Вариант 3

1.Вычислить неопределенный интеграл:

$1¿\int 4dx;2¿\int 7x^2dx;3¿\int \left(x^2-4x+3\right)dx;4¿\int x^{-8}dx;5¿\int \frac{2dx}{x};¿¿¿$

$6¿\int \frac{3dx}{\cos^2 x};7¿\int \frac{2dx}{\sin^2 x};8¿\int 3^x;9¿\int e^{-2x}dx;10¿\int \sqrt{e^x-2}dx;11¿\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}};¿¿¿¿¿$

$12¿\int x\sqrt{4-x^2}dx;13¿\int \frac{x^2dx}{2+3x^3};14¿\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}.¿¿$

Вариант 4

1.Вычислить неопределенный интеграл:

$1)\int 7xdx;2¿\int 8x^3dx;3¿\int \left(2x^2+5x+3\right)dx;4¿\int x^{-6}dx;5¿\int \frac{3dx}{x}dx;¿¿¿¿$

$6¿\int \frac{3dx}{\cos^2 x};7¿\int \frac{2dx}{\sin^2 x};8¿\int 3x;9¿\int e^{-2x}dx;10¿\int \sqrt{e^x-2}dx;11¿\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}};¿¿¿¿¿$

$11¿\int \frac{dx}{\sqrt{1-36x^2}};12¿\int x\sqrt{5-x^2}dx;13¿\int \frac{x^2dx}{3+2x^3};14¿\int \frac{dx}{\sqrt{13+12x-x^2}}.¿¿¿$

Вариант 5

1.Вычислить неопределенный интервал:

$1¿\int 8xdx;2¿\int 9x^4dx;3¿\int \left(2x^2+7x+4\right)dx;4¿\int 3x^{-7}dx;5¿\int \frac{4dx}{x}dx;¿¿¿¿$

$6¿\int \frac{9dx}{2\cos^2 x};7¿\int \frac{6dx}{\sin^2 x};8¿\int 5^x;9¿\int e^{-3x}dx;10¿\int \frac{\ln 4x}{x\ln 8x}dx;¿¿¿¿$

$11¿\int \frac{dx}{\sqrt{1-81x^2}};12¿\int x\sqrt{6-x^2}dx;13¿\int \frac{x^2dx}{5+2x^3};14¿\int \sqrt{9-x^2}dx.¿¿¿$

Вариант 6

1.Вычислить неопределенный интеграл:

1¿ $\int 9x\,dx$; 2¿ $\int 10x^5\,dx$; 3¿ $\int (3x^2-4x+4)\,dx$; 4¿ $\int 4x^{-8}\,dx$; 5¿ $\int \frac{5\,dx}{x}\,dx$; ¿¿¿¿

6¿ $\int \frac{10\,dx}{3\cos^2 x}$; 7¿ $\int \frac{7\,dx}{\sin^2 x}$; 8¿ $\int 6^x$; 9¿ $\int e^{-4x}\,dx$; 10¿ $\int \frac{\ln 5x}{x\ln 10x}\,dx$; ¿¿¿¿

11¿ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-49x^2}}$; 12¿ $\int x\sqrt{7-x^2}\,dx$; 13¿ $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; 14¿ $\int \frac{dx}{\sqrt{24+2x-x^2}}$. ¿¿¿

Контрольные вопросы

1.Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$?
2.Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$?
3.В чем состоитметод непосредственного интегрирования?
4.В чем состоит метод замены переменной (метод подстановки)?

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 8

Нахождение неопределенного интеграла методом по частям
(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: научить вычислять неопределенный интеграл по частям.

Оборудование: таблица первообразных, калькулятор, тетрадь для практических работ, ручка.

Краткие теоретические сведения

Согласно правилу дифференцирования произведения имеем $d(uv)=vdu+udv$. $udv=d(uv)-vdu$. Интегрируя обе части этого равенства, получим: $\int udv=\int d(uv)-vdu$.

Воспользуемся свойством неопределенного интеграла

$\int f(x)dx=f(x)+C,\ \int df(x)=f(x)+C,\ \int d(uv)=uv+C$.

$\int uvd=uv-\int vdu$ – эта формула называется формулой интегрирования по частям.

Для применения формулы интегрирования по частям к некоторому интегралу $f(x)dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)dx$ представить в виде произведения двух сомножителей: u и dv.

При использовании формулы интегрирования по частям для нахождения интегралов от произведения нельзя дать общее правило для определения того, какой сомножитель в подынтегральном выражении следует обозначить через г и какой через dv. Поэтому ограничимся следующими рекомендациями:

1. Применение формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда подынтегральное выражение удается представить в виде произведения двух множителей u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений u и dv было более простой задачей, чем интегрирование исходного выражения udv.
2. При вычислении интегралов вида $\int P(x)lnxdx,\ \int P(x)arcsinxdx,\ \int P(x)arctgxdx$, где *P(x)* – многочлен, и за u функцию принимают *lnx, arcsinx, arctgx.*
3. При вычислении интегралов вида $\int P(x)e^{ax};\ \int P(x)sinaxdx,\ \int P(x)cosaxdx$, за u принимают многочлен *P(x)*

4. Если степень многочлена *P(x)* выше первой, то операцию интегрирования по частям следует применить несколько раз. При вычислении интегралов вида $\int e^{ax} sinbxdx$; $\int e^{ax} cosbxdx$, $a^2+b^2 \neq 0$ формулу интегрирования по частям применяют дважды, причем оба раза за u выбирают либо показательную функцию, либо тригонометрическую. После двукратного интегрирования по частям получают линейное уравнение относительно искомого интеграла.

Покажем это на примерах:

Пример 1. Найти $\int x e^x dx$. Пусть $u=x, dv=e^x dx, du=dx, v=e^x$.

Используя формулу $\int udv - \int vdu$, получим

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

При использовании формулы интегрирования по частям для нахождения интегралов от произведения нельзя дать общее правило для определения того, какой сомножитель в подынтегральном выражении следует обозначить через u и какой через dv. Поэтому ограничимся следующими рекомендациями:

1) Применение формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда подынтегральное выражение удается представить в виде произведения двух множителей u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений u и dv было более простой задачей, чем интегрирование исходного выражения udv.
2) При вычислении интегралов вида $\int P(x) lnxdx$, $\int P(x) arcsinxdx$, $\int P(x) arctgxdx$, где *P(x)* – *м*ногочлен, и за u функцию принимают lnx, arcsinx, arctgx.
3) При вычислении интегралов вида $\int P(x) e^{ax} dx; \int P(x) sinaxdx, \int P(x) cosaxdx$, за u принимают многочлен *P(x).*
4) Если степень многочлена *P(x)* выше первой, то операцию интегрирования по частям следует применить несколько раз. При вычислении интегралов вида $\int e^{ax} sinbxdx; \int e^{ax} cosbxdx, a^2+b^2 \neq 0$ формулу интегрирования по частям

применяют дважды, причем оба раза за u выбирают либо показательную функцию, либо тригонометрическую. После двукратного интегрирования по частям получают линейное уравнение относительно искомого интеграла.

Пример 2. Найти $\int lnxdx$.

$$u=lnx\,,dv=dx\,,du=\frac{dx}{x}\,,v=x$$

Используя формулу $\int udv=uv-¿\int vdu¿$, получим

$$\int lnxdx=xlnx-\int x\frac{dx}{x}=xlnx-\int dx=xlnx-x+C.$$

Пример 3. Найти $\int xcosxdx$.

$$u=x\,,dv=cosxdx\,,du=dx\,,v=sinx$$

$$\int xcosxdx=xsinx-\int sinxdx=xsinx-cosx+C.$$

Пример 4. Найти $\int xarctgxdx$.

$$u=arctgx\,,dv=xdx\,,du=\frac{dx}{1+x^2}\,,v=\frac{x^2}{2}$$

Используя формулу $\int udv=uv-\int vdu$, получим

$$\int xarctgxdx=\frac{x^2}{2}arctg-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}.$$

Вычислим отдельно последний интеграл:

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-arctg+C.$$

$$\int xarctgxdx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}arctgx+C=\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+C.$$

Пример 5. Найти $\int x^3lnxdx$.

$$u=lnx\,,dv=x^3dx\,,du=\frac{dx}{x}\,,v=\frac{1}{4}x^4$$

Используя формулу $\int udv=uv-\int vdu$, получим

$$\int x^3lnxdx=\frac{1}{4}x^4lnx-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4lnx-\frac{1}{16}x^4+C.$$

Пример 6. Найти $\int x(x-5)\sin 2xdx$.

$$u=x^2-5x\,,dv=\sin 2xdx\,,du=(2x-5)dx\,,v=\frac{-\cos 2x}{2}.$$

$$\int x(x-5)\sin 2xdx=\frac{-x^2-5x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int(2x-5)\cos 2xdx.$$

Для вычисления последнего интеграла еще раз проинтегрируем его по частям.

$u=2x-5, dv=\cos 2x dx, du=2dx, v=\frac{\sin 2x}{2}$.

$$\int (2x-5)\cos 2x dx=\frac{2x-5}{2}\sin 2x-\int \sin 2x dx=\frac{2x-5}{2}\sin 2x+\frac{\cos 2x}{2}+C.$$

$$\int x(x-5)\sin 2x dx=\frac{-x^2-5}{2}\cos 2x+\frac{2x-5}{4}\sin 2+\frac{1}{4}\cos 2x+C=\frac{1+10x-2x^2}{4}\cos 2x+\frac{2x-5}{4}\sin 2x+C$$

.

Пример 7. Найти $\int (x^4+1)lnxdx$.

$$\int (x^4+1)lnxdx=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)lnx-\int\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)lnx-\frac{x^5}{25}-x+C.$$

Пример 8. Найти $\int arcsinxdx$.

$u=arcsinx, dv=dx, du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v=x$.

$$\int arcsinxdx=xarcsinx-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsinx+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ взят заменой $t=1-x^2, dt=-2xdx, dx=\frac{-dt}{2x}, xdx=\frac{-dt}{2}$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-dt}{2\sqrt{t}}=\frac{-1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 9. Найти

$$\int (2x^2-x+1)\sin 4x dx=\left|\begin{matrix}u=2x^2-x+1; du=(4x-1)dx\\ dv=\sin 4x dx; v=\frac{-1}{4}\cos 4x\end{matrix}\right|=-(2x^2-x+1)\frac{1}{4}\cos 4x+\int\frac{1}{4}\cos 4x(4x-1)dx=-$$

.

Интеграл $\int\cos 4x\left(x-\frac{1}{4}\right)dx$ взят заменой

$$\cos 4x\left(x-\frac{1}{4}\right)dx=\left|\begin{matrix}u=x-\frac{1}{4}; du=dx\\ dv=\cos 4x dx; v=\frac{1}{4}\sin 4x\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{4}\right)\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 4x dx=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{4}\right)\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x$$

.

Практическая часть

Вариант 1

Вычислить неопределенный интеграл по частям

1) $\int \ln 2xdx$; 2) $\int 2xcosxdx$; 3¿ $\int 5xe^{x}dx$; 4¿¿ $\int \frac{1}{5}xarctgxdx$; 5¿ $\int \frac{1}{2}x^{3}lnxdx$; ¿¿

6¿ $\int 3x(x-5)\sin 2xdx$; 7¿ $\int xsinxdx$; 8¿¿ $\int (1-x)sinxdx$; 9¿ $\int (x^{3}+1)lnxdx$¿¿.

Вариант 2

Вычислить неопределенный интеграл по частям

1) $\int \ln 3xdx$; 2) $\int 3xcosxdx$; 3¿ $\int 4xe^{x}dx$; 4¿¿ $\int \frac{1}{3}xarctgxdx$; 5¿ $\int 2x^{3}lnxdx$; ¿¿

6¿ $\int \frac{1}{2}x(x-5)\sin 2xdx$; 7¿ $\int 6xsinxdx$; 8¿¿ $\int \frac{lnx}{x^{3}}dx$; 9¿ $\int (x^{2}+1)lnxdx$¿¿.

Вариант 3

Вычислить неопределенный интеграл по частям

1) $\int \ln 4xdx$; 2) $\int 6xcosxdx$; 3¿ $\int 3xe^{x}dx$; 4¿¿ $\int 2xarctgxdx$; 5¿ $\int \frac{1}{3}x^{3}lnxdx$; ¿¿

6¿ $\int 2x(x-5)\sin 2xdx$; 7¿ $\int 2xsinxdx$; 8¿¿ $\int xe^{x}dx$; 9¿ $\int (x+1)lnxdx$¿¿.

Вариант 4

Вычислить неопределенный интеграл по частям

1) $\int \ln 5xdx$; 2) $\int 4xcosxdx$; 3¿ $\int 2xe^{x}dx$; 4¿¿ $\int 3xarctgxdx$; 5¿ $\int 3x^{3}lnxdx$; ¿¿

6¿ $\int 4x(x-5)\sin 2xdx$; 7¿ $\int 3xsinxdx$; 8¿¿ $\int \frac{5lnx}{x^{3}}dx$; 9¿ $\int (2x^{2}+1)lnxdx$¿¿.

Вариант 5

Вычислить неопределенный интеграл по частям

1) $\int \ln 6xdx$; 2) $\int 5xcosxdx$; 3¿ $\int \frac{1}{2}xe^{x}dx$; 4¿¿ $\int 4xarctgxdx$; 5¿ $\int \frac{1}{4}x^{3}lnxdx$; ¿¿

6¿ $\int \frac{1}{5}x(x-5)\sin 2xdx$; 7¿ $\int 4xsinxdx$; 8¿¿ $\int 2xe^{x}dx$; 9¿ $\int (x^{2}+2)lnxdx$¿¿.

Вариант 6

Вычислить неопределенный интеграл по частям

1) $\int \ln 7xdx$; 2) $\int 3xcosxdx$; 3¿ $\int \frac{1}{3}xe^{x}dx$; 4¿¿ $\int 5xarctgxdx$; 5¿ $\int 4x^{3}lnxdx$; ¿¿

$6¿\int \frac{1}{10} x(x-5)\sin 2xdx;7¿\int \frac{1}{2} xsinxdx;8¿¿\int 4xe^{x}dx;9¿\int (x^{2}+3)lnxdx¿¿.$

Контрольные вопросы

1. Запишите формулу интегрирования по частям.
2. Какую функцию следует принимать за u при нахождении интеграла вида $\int P(x)lnxdx, \int P(x)arcsinxdx, \int P(x)arctgxdx$, где *P(x)* – многочлен
3. Какую функцию следует принимать за при нахождении интеграла вида $\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)sinaxdx, \int P(x)cosaxdx$, где *P(x)* – многочлен

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;

- краткие теоретические сведения;

- практическую часть по варианту;

- ответы на контрольные вопросы;

- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 9

Замена переменной в определенном интеграле

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: научить вычислять определенные интегралы непосредственным интегрированием, с помощью замены переменной.

Оборудование: таблица первообразных, тетрадь для практических работ, ручка.

Краткие теоретические сведения

Определение. Если предел $\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$ существует и не зависит от выбора точек c_i, то функция f называется интегрируемой на отрезке $[a;b]$, а предел называется определенным интегралом и обозначается $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

Число a называется нижним пределом интегрирования, число b – верхним пределом, отрезок $[a;b]$ – отрезком интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла.

1. Определенный интеграл с одинаковым пределом равен нулю
$$\int_a^b f(x)dx = 0$$
2. При перестановке пределов интегрированный знак интеграла меняется на противоположный.
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
3. Отрезок интегрирования можно разбить на части:
$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; где $a \le c \le b$
4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела
$$\int_a^b c f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$
5. Интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме интегралов от всех слагаемых:
$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

Для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную, а затем воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Таблица первообразных

Функция	Первообразная
$x^p, p\neq 1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{1}{x}, x>0$	$lnx+C$
e^x	e^x+C
$sinx$	$-cosx+C$
$cosx$	$sinx+C$
$(kx+b)^p, p\neq 1, k\neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
$\frac{1}{kx+b}, k\neq 0$	$\frac{1}{k}\ln(kx+b)+C$
$e^{kx+b}, k\neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$
$\sin(kx+b), k\neq 0$	$\frac{-1}{k}\cos(kx+b)+C$
$\cos(kx+b), k\neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$

Примеры

1. Вычислить определенный интеграл:

   1) $\int\limits_1^2 2x^5\,dx = 2\frac{x^6}{6}\Big|_1^2 = \frac{64}{3}-\frac{1}{3}=\frac{63}{3}=21$

   2) $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx\Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$

   3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

   4) $\int\limits_{-2}^{3} (x^2-3x+5)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big|_{-2}^{3} = 9-\frac{27}{2}+15-\left(\frac{-8}{3}-6-10\right)=29\frac{1}{6}$

Вычисление определенного интеграла методом подстановки:

1) Часть подынтегральной функции заменить новой переменной;
2) Найти новые пределы интегрирования;
3) Найти дифференциал от обеих частей замены;
4) Всё подынтегральное выражение выразить через новую переменную (должен получиться табличный интеграл)
5) Вычислить полученный интеграл

   5)Вычислить определенный интеграл методом замены переменной:

$$\int\limits_1^3 (5x-7)^3\,dx$$

Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $5x-7=u$. Дифференцируя, имеем: $5d=du; dx=\frac{1}{5}du;$

Находим новые пределы интегрирования: $u=15-7=8; u=5-7=-2$.

Следовательно,

$$\int_1^3 (5x-7)^3 dx=\frac{1}{3}\int_{-2}^{8} u^3 du=\frac{1}{5}\frac{u^4}{4}\Big|_{-2}^{8}=\frac{4096}{20}-\frac{16}{20}=204$$

6) Вычислить определенный интеграл методом замены переменной: $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx=2\int_1^2 t^2(t^2-1)dt=2\int_1^2 (t^4-t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{116}{15}$

Практическая часть

Вариант 1

Вычислить определенный интеграл

1) $\int_0^1 5dx$; 2) $\int_1^2 6x^2 dx$; 3) $\int_2^3 x^{-4}dx$; 4) $\int_1^e \frac{3dx}{x}$; 5) $\int_0^1 xdx$;

6) $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1)dx$; 7) $\int_{-1}^1 e^x dx$; 8) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; 9) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$; 10) $\int_2^3 (2x-1)^3$; 11) $\int_0^3 2x\sqrt{1+x}\,dx$.

Вариант 2

Вычислить определенный интеграл

1¿ $\int_0^1 2xdx$; 2) $\int_2^3 3x^2dx$; 3) $\int_1^2 (x\text{¿¿}2+3x+1)dx\text{¿}$; 4) $\int_0^1 e^{xdx}$; 5) $\int_1^e \frac{dx}{x}$;

6) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinxdx$; 7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $\int_2^3 (3x-1)^3dx$; 9) $\int_2^7 x\sqrt{2+x}\,dx$;

10) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx$; 11) $\int_0^3 4x\sqrt{1+x}\,dx$; 12) $\int_0^2 (2-x)^2dx$.

Вариант 3

Вычислить определенный интеграл

1¿ $\int_{-2}^1 3xdx$; 2) $\int_1^3 4x^2dx$; 3) $\int_{-1}^2 (x\text{¿¿}2+4x+2)dx\text{¿}$; 4) $\int_{-1}^1 e^{4x}dx$; 5) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$;

$6)\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^{2x}}dx;\ 7)\int\limits_{0}^{2}(3x^5+4x^2)dx;\ 8)\int\limits_{1}^{2}(3x-2)^4dx;\ 9)\int\limits_{0}^{3}x\sqrt{1+x}\,dx;$

$10)\int\limits_{-2}^{2}(1+x)^2dx;\ 11)\int\limits_{0}^{3}8x\sqrt{1+x}\,dx;\ 12)\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{x^4+16}*x^3dx.$

Вариант 4

Вычислить определенный интеграл

$1¿\int\limits_{2}^{3}4xdx;\ 2)\int\limits_{2}^{3}5x^2dx;\ 3)\int\limits_{1}^{2}(x¿¿2+5x+3)dx¿;\ 4)\int\limits_{0}^{3}e^xdx;\ 5)\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{x};$

$6)\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^{2x}}dx;\ 7)\int\limits_{0}^{5}x\sqrt{4+x}\,dx;\ 8)\int\limits_{0}^{3}(2x-6)^3dx;\ 9)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx;$

$10)\int\limits_{1}^{2}\frac{1+x^7}{x^6}dx;\ 11)\int\limits_{0}^{3}\frac{1}{2}x\sqrt{1+x}\,dx;\ 12)\int\limits_{2}^{4}\frac{xdx}{(x^2-1)^3}dx.$

Вариант 5

Вычислить определенный интеграл

$1¿\int\limits_{0}^{2}(2-x)^2dx;\ 2)\int\limits_{0}^{4}(2\sqrt{x}-x^2)dx;\ 3)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\,sinxdx;\ 4)\int\limits_{-1}^{1}(5-x-3x^2)dx;\ 5)\int\limits_{1}^{2}\frac{x-1}{x^3}dx;\ 6)$

$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\,cosxdx;\ 7)\int\limits_{2}^{3}x^2dx;$

$8)\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}dx;\ 9)\int\limits_{1}^{2}\frac{3x^2+2}{x}dx;\ 10)\int\limits_{0}^{1}(e^x+x)dx;$

$11)\int\limits_{0}^{3}\frac{1}{4}x\sqrt{1+x}\,dx;\ 12)\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{128\,xdx}{(x^2+1)^5}dx.$

Вариант 6

Вычислить определенный интеграл

$1¿\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)^3dx;\ 2)\int\limits_{-1}^{1}\left|x^2-2\right|dx;\ 3)\int\limits_{1}^{8}\left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx;\ 4)\int\limits_{1}^{4}\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx;\ 5)\int\limits_{2}^{3}\frac{1+x^5}{x^4}dx;\ 6)$

$\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{3\,dx}{2\cos^2 3x};\ 7)\int\limits_{0}^{3}(3x-7)^3dx;$

$8)\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}};\ 9)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosxdx}{(3-sinx)^2};\ 10)\int\limits_{1}^{2}\frac{2x^2+1}{x}dx;$

11) $\int_0^3 4x\sqrt{1+x}\,dx$; 12) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла от непрерывной неотрицательной функции?
3. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?
4. В чем состоит метод замены переменной (метод подстановки)?

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:
- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 10

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла
(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: научить применять понятие определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур

Оборудование: карандаш, линейка, тетрадь для практических работ, ручка.

Краткие теоретические сведения

Используя понятие определенного интеграла, вычислим площадь криволинейной трапеции, так как определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла, на этом основано его применение к вычислению площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной непрерывной функции $y=f(x), x\in[a;b]$, отрезком $[a;b]$ оси OX, отрезками прямых $x=a, x=b$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+2, x=-1, x=2$ и отрезком $[-1;2]$ оси OX

Даная фигура представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь находим по формуле $S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=6$

Пусть $y=f(x), x\in[a;b]$, - неположительная непрерывная функция. В этом случае график этой функции расположен под осью OX и $\int_a^b f(x)dx\le 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $y=-f(x), x\in[a;b]$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=-f(x), x\in[a;b]$, отрезком $[a;b]$ оси ОХ, отрезками прямых $x=a, x=b$, вычисляется по формуле $S=-\int_a^b f(x)dx$

Пример 2. Вычислять площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt[3]{x}$,

$$x=-1, y=0$$

График функции $y=\sqrt[3]{x}, x\in[-1;0]$, расположен под осью ОХ, поэтому для вычисления площади данной фигуры применим формулу

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

$$S=-\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}dx=\frac{-3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{4}$$

Рассмотрим фигуру, ограниченную двумя графиками неотрицательных непрерывных функций $y=f_1(x), x\in[a;b], y=f_2(x), x\in[a;b]$ и отрезками прямых $x=a, x=b$. Площадь S этой фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций. Следовательно,

$$S=\int_a^b f_1(x)-\int_a^b f_2(x)=¿\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))dx¿$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x+3, y=x^2+1$$

Решив уравнение $x+3=x^2+1$, найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=f_1(x), y=\frac{f_2(x)}{x}=-1; x=2$.

$$\int_{-1}^{2}(x+3-x^2-1)dx=\int_{-1}^{2}(x-x^2+2)dx=\left(\frac{-1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

Практическая часть

Вариант 1

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^2+1, y=0, x=0, x=2.$
2) $y=8-7x-x^2, y=2x+16, x=0$

Вариант 2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=6x-x^2, y=0.$
2) $y=x^3, x+y=2, y=0$

Вариант 3

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^3, y=0.$
2) $y=2x^2, y=\frac{x^3}{3}$

Вариант 4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\sqrt{x-2}, y=0, x=0, x=6.$
2) $y=\frac{1}{2}x^2, y=\frac{1}{1+x^2}$

Вариант 5

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^2-5x+6, y=0.$
2) $y=\sqrt{x}, y=x-2, x=0$

Вариант 6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\sqrt{x}, x=0, x=9, y=0.$
2) $y=2x-x^2, y=x$

Контрольные вопросы

1. По какой формуле вычисляется площадь криволинейной трапеции?
2. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной неположительной функции $y=f(x), x\in[a;b]$ оси ОХ, отрезками прямых $x=a, x=b$?
3. Запишите формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной графиками непрерывных неотрицательных функций $y=f_1(x), x\in[a;b]$, $y=f_2(x), x\in[a;b]$, и отрезками прямых $x=a, x=b$.

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.