МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Методические указания

для студентов по проведению практических занятий

Учебная дисциплина ЕН.01 Элементы высшей математики
(индекс и наименование учебной дисциплины)

Специальность 09.02.03 Программирование в компьютерных системах
(код и наименование специальности)

Согласовано
Советом по методическим вопросам
протокол от 29.08 2020г. № 1
Председатель
_________ Е.В. Кужилева

Утверждаю
Зам. директора по УР
_________ Т.В. Трусова
30 августа 2020г.

Рассмотрено
УМО математических и общих естественнонаучных дисциплин
Протокол от 29.08 2020г. № 1
Председатель УМО
_________ О.Н. Поволоцкая

Организация-разработчик: ГБПОУ КК «Новороссийский колледж радиоэлектронного приборостроения» (далее ГБПОУ КК НКРП)

Разработчик:

преподаватель ГБПОУ КК НКРП (должность, место работы)	_________ (подпись)	Е.И. Миронова (ФИО)

Рецензенты:

Поволоцкая О.Н.,	_________ (подпись)	преподаватель ГБПОУ КК НКРП (должность, место работы)
Лосева В.С.,	_________ (подпись)	преподаватель ГБПОУ КК НСПК (должность, место работы)

РЕЦЕНЗИЯ

на методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики, разработанные преподавателем ГБПОУ КК «Новороссийский колледж радиоэлектронного приборостроения» Мироновой Е.И.

Рецензируемые методические указания по выполнению практических занятий учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах (утв. приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 28.07.2014 г. № 804, зарегистрирован в Минюст России от 21.08.2014 г. № 33733) и на основе рабочей программы учебной дисциплины (утв. директором колледжа 31.08.2020 г.).

Методические указания включают в себя пояснительную записку, требования по оформлению практических занятий, описания по выполнению каждого практического занятия в соответствии с рабочей программой ЕН.01 Элементы высшей математики.

Практические занятия представлены в логической последовательности, согласно рабочей программе. Дано подробное описание конкретного практического занятия, контрольные вопросы.

Методические рекомендации имеют практическую направленность. Представленные задания включают в себя освоение следующих умений:

– выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
– решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
– применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
– решать дифференциальные уравнения;
– пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

Формируемые в процессе практических занятий умения и навыки могут быть использованы студентами в будущей профессиональной деятельности.

Содержание дисциплины ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

– ПК.1.1 Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.
– ПК.1.2 Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.
– ПК.2.4 Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

Методические указания могут быть использованы как на учебных занятиях, так и для выполнения обучающимися самостоятельных работ.

Таким образом, методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики способствуют формированию общих и профессиональных компетенций, соответствуют ФГОС среднего профессионального образования по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, рабочей программе учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики и рекомендуются для использования в образовательном процессе ГБПОУ КК НКРП.

Рецензент: ________ подпись Лосев В.С. расшифровка

Для документов

25 08 2020 г.

Аннотация

Методические указания для студентов по проведению практических занятий учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах включают в себя перечень практических занятий в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины.

Использование методических указаний позволит преподавателю достичь поставленных педагогических целей, а обучающимся сформировать умения в соответствии с ФГОС СПО по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах: выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений; решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости; применять методы дифференциального и интегрального исчисления; решать дифференциальные уравнения.

Содержание

Аннотация
Требования к оформлению практических занятий
Практическое занятие № 1 Вычисление определителей
Практическое занятие №2 Матрицы. Действия над матрицами
Практическое занятие №3 Решение систем линейных уравнений методом Крамера
Практическое занятие №4 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
Практическое занятие №5 Операции над векторами
Практическое занятие №6 Составление уравнений прямых и кривых 2-го порядка, их построение
Практическое занятие №7 Вычисление предела. Исследование функции одной переменной на непрерывность
Практическое занятие №8 Производная функции одной переменной и ее приложения к исследованию функции
Практическое занятие №9 Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя.
Практическое занятие №10 Полное исследование функции. Построение графиков
Практическое занятие№11 Основные методы интегрирования
Практическое занятие№12 Интегрирование рациональных и иррациональных функций
Практическое занятие №13 Интегрирование при помощи универсальной подстановки
Практическое занятие №14 Вычисление определенного интеграла
Практическое занятие №15 Приложения определенного интеграла
Практическое занятие №16 Вычисление частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных
Практическое занятие №17Вычисление экстремумов функции двух действительных переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений
Практическое занятие №18 Вычисление двойных интегралов
Практическое занятие №19 Приложение двойных интегралов.
Практическое занятие №20 Исследование числовых рядов на сходимость.

Требования к оформлению практических занятий

При выполнении практического задания и его оформления необходимо соблюдать следующие правила:

- работа оформляется в тетради для практических занятий;
- решение задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях;
- решение задач надо оформлять аккуратно, подробно объясняя все действия и используемые формулы;
- после получения проверенной преподавателем работы, студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты;
- в случае незачета студент должен в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя и представить работу на повторную проверку.

Зачет по каждому практическому занятию студент получает после её выполнения и предоставления преподавателю на проверку, оформленного отчета, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 1

Вычисление определителей.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) _____Элементы высшей математики_____
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научить применять свойства определителей к их вычислению и вычислить определители до n-го порядка различными методами.
Перечень оборудования: ПК, калькулятор, учебная литература.

Краткие теоретические сведения

Пусть дана квадратная таблица из девяти чисел a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Определителем третьего порядка, соответствующим таблице (1), *называется число, обозначаемое символом:*

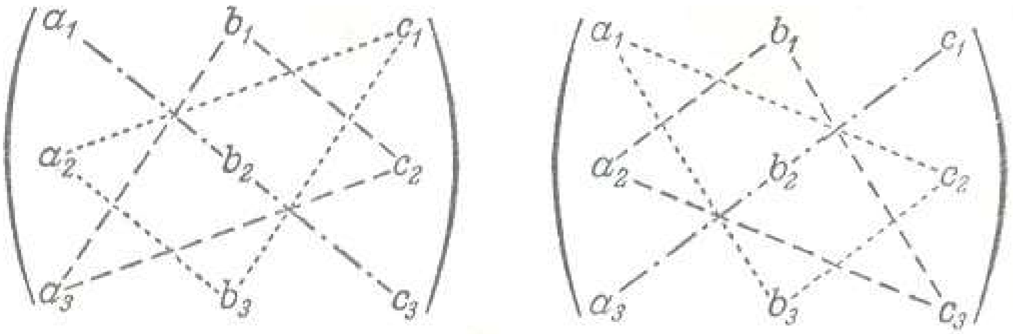
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \tag{2}$$

Числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 называются *элементами определителя*. Элементы a_1, b_2, c_3 расположены на диагонали определителя, называемой *главной*; элементы a_3, b_2, c_1 составляют его побочную диагональ.

Обратим внимание читателя на то, что первые три слагаемых в правой части равенства (2) представляют собой произведения элементов определителя, взятых по три так, как показано различными пунктирами на нижеприводимой схеме слева.



Чтобы получить следующие три члена правой части равенства (2), нужно перемножить элементы определителя по три так, как показано различными пунктирами на той же схеме справа, после чего у каждого из найденных произведений изменить знак.

Указанное сейчас правило, называемое правилом треугольников, позволяет без напряжения памяти написать формулу (2), а также вычислить определитель третьего порядка с численно заданными элементами (без того, чтобы предварительно выписывать формулу (2)).

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3\cdot 2+(-2)\cdot 0\cdot 1 -$$
$$-2\cdot 1\cdot 1-3\cdot 0\cdot 3-(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-12.$$

Определители широко применяются как в самой математике, так и в ее приложениях. Немного далее мы покажем применение определителей третьего порядка в вопросе исследования и решения системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными. Но сначала нам придется познакомиться с некоторыми свойствами определителей. Ряд важнейших свойств определителей сообщается в следующем п°; все пояснения, относящиеся к этим свойствам, мы будем проводить, имея в виду определители третьего порядка; однако сами свойства присущи определителям всех порядков (понятие определителя порядка выше третьего изложено в конце настоящего приложения).

С в о й с т в о 1. *Величина определителя не изменится, если все его строки заменить его столбцами, причем*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Это свойство можно выразить еще так: *если поменять местами элементы определителя, расположенные симметрично относительно главной диагонали, то величина определителя останется неизменной.*

Для доказательства этого свойства достаточно применить правило треугольников к левой и правой части равенства (3) и сравнить полученные результаты.

Замечание. Свойство 1 означает равноправность строк *и столбцов определителя; поэтому дальнейшие свойства* определителя, присущие его столбцам и строкам, достаточно доказывать только для столбцов или только для строк.

Свойство 2. *Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на —1.*

Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Для доказательства равенства (4) достаточно применить правило треугольников к его левой и правой части и сравнить полученные результаты (точно так же устанавливаются аналогичные равенства, соответствующие перестановке других столбцов определителя).

Свойство 3. *Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.*

В самом деле, пусть Δ какой-нибудь определитель, имеющий два одинаковых столбца. Если мы переставим эти столбцы, то, с одной стороны, в силу свойства 2 определитель изменит знак. Но, с другой стороны, поскольку переставляемые столбцы одинаковы, их перестановка не может изменить определителя. Следовательно, $\Delta = -\Delta$, т. е. $2\Delta = 0$, или $\Delta = 0$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 17 \\ 5 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 4. *Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число k равносильно умножению определителя на это число k.*

Иначе это свойство можно высказать так: *общий множитель всех элементов одного столбца или одной строки определителя можно вынести за знак определителя.*

Например,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что определитель выражается в виде суммы, каждый член которой содержит множителем один элемент из каждой строки и из каждого столбца

Свойство 5. *Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то сам определитель равен нулю.*

Это свойство есть частный случай предыдущего (при $k=0$).

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. *Если соответствующие элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

Это свойство следует из свойств 4 и 3. В самом деле, если элементы двух столбцов определителя пропорциональны, то элементы одного из них получаются умножением элементов другого на некоторый общий множитель. Вынося этот множитель за знак определителя, мы получим определитель с двумя одинаковыми столбцами; согласно свойству 3 он равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 7. *Если каждый элемент n-го столбца (или n-й строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-м столбце (или соответственно в n-й строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой — вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же.*

Например,

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого равенства достаточно применить правило треугольников к определителям, записанным в его левой и правой части, и сравнить полученные результаты.

Свойство 8. *Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или другой строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.*

Свойство 8 вытекает из свойств 7 и 6; поясним это на примере. Пусть к элементам первого столбца прибавлены элементы второго столбца, умноженные на некоторое число k. Тогда согласно свойству 7 имеем:

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Второй из полученных определителей имеет два пропорциональных столбца. Следовательно, по свойству 6 он равен нулю; получаем равенство

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

которое в данном случае и выражает указанное свойство определителя.

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятием алгебраического дополнения и минора.

Алгебраические дополнения и миноры

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Соберем здесь члены, содержащие какой-нибудь один элемент *определителя, и вынесем этот элемент за скобки*; величина, остающаяся в скобках, называется *алгебраическим дополнением* этого элемента. Алгебраическое дополнение элемента мы будем обозначать большой буквой того же наименования и с тем же номером, что и буква, которой обозначен сам элемент. Например, алгебраическое дополнение элемента a_1 будет обозначаться через A_1, элемента b_1 — через B_1 и т. д.

Свойство 9. *Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца (или строки) на их алгебраические дополнения.*

Иначе говоря, имеют место следующие равенства:

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \quad \Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \qquad (3)$$

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \quad \Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \qquad (4)$$

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, \quad \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \qquad (5)$$

Чтобы доказать, например, первое из этих равенств, достаточно записать правую часть формулы (2) в виде

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1);$$

величины, стоящие здесь в скобках, являются алгебраическими дополнениями элементов a_1, a_2, a_3, т. е.

$$b_2c_3 - b_3c_2 = A_1; \quad b_3c_1 - b_1c_3 = A_2, \quad b_1c_2 - b_2c_1 = A_3.$$

Отсюда и из предыдущего получаем:

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,$$

что и требовалось. Остальные равенства (3—5) доказываются аналогично. Запись определителя согласно какой-нибудь из формул (3—5) называется разложением его по элементам некоторого столбца или некоторой строки (первая формула дает разложение по элементам первого столбца и т. д.).

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Например, минором элемента a_1 определителя Δ является определитель $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, минором элемента b_1 является определитель $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и т. д.

Оказывается, что *алгебраическое дополнение любого элемента определителя равняется минору этого элемента, взятому со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент, есть число четное, и с обратным знаком, если это число — нечетное.* Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, читатель должен рассмотреть алгебраические дополнения всех элементов определителя и сравнить их с минорами.

Указанное сейчас обстоятельство существенно облегчает *использование формул (3—5), так как позволяет записывать* алгебраические дополнения элементов определителя сразу, просто «глядя» на этот определитель. При этом еще полезно *иметь в виду следующую схему:*

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

где знаком плюс помечены места тех элементов, для которых алгебраические дополнения равны минорам, взятым с их собственными знаками.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам первой строки.

Решение.

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 8.$$

Практическая часть.

Вычислить определители:

Вариант №1

А) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Вариант №2

А) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ Б) $\begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 20 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Вариант №3

а) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 20 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ В) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix}$

Вариант №4

А) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 4 & 31 & 2 \\ 2 & 20 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Вариант №5

А) 3 6 9 -3 -6 б) 1 1 -1 в) 1 -4 -3
1 2 1 -1 -2 8 3 -6 3 1 5
0 4 1 2 3 4 1 -3 3 -5 -9
1 -1 2 1 -2
5 15 10 5 -5

Вариант №6

А) -3 2 1 0 1 б) 2 4 -1 в) 5 3 1
1 -3 2 1 0 3 11 4 1 2 1
0 1 -3 2 1 3 11 -2 11 2 3
1 -1 1 -3 2
2 1 0 1 -3

Вариант №7

А) 9 8 7 6 5 б) 1 -1 2 в) 3 8 2
6 8 5 9 7 2 -4 2 2 -4 -3
0 1 -1 3 0 4 -2 4 1 0 1
3 0 1 0 2
-3 -1 1 5 2

Вариант №8

А) 8 7 6 5 4 б) 1 -1 2 в) -1 3 -2
1 1 1 1 1 2 -4 1 -4 1 2
4 5 6 7 8 9 1 8 3 -4 5
-1 0 -1 0 -1
5 6 8 7 4

Вариант №9

А) 4 2 0 7 2 б) 1 -1 -1 в) 1 -1 1
4 4 2 10 8 -1 4 7 2 -6 3
4 6 9 2 10 8 1 -1 3 -
3 1
3 5 8 7 1
1 2 -1 0 0

Вариант №10

А) 4 5 6 3 0 б) 1 2 3 в) 9 7 7
-4 0 2 -1 3 4 1 2 2 -1 2
2 3 2 1 0 3 5 8 1 1 1
1 3 0 2 3
-5 1 1 4 7

Вариант №11

А) 0 1 1 10 1 б) 1 6 3 в) 4 -5 7
2 2 0 3 2 -2 0 1 1 -4 9
2 0 1 2 3 -1 2 -1 -4 0 5
0 3 -2 1 -1
-3 3 -1 -1 0

Вариант №12

А) 2 0 1 -1 0 б) 1 -3 4 в) 0 7 4
3 1 3 0 1 4 -7 8 0 1 0
4 3 2 1 46 -7 7 1 13 0
0 -1 5 1 0
1 5 -1 1 2

Вариант №13

А) 1 3 5 7 9 б) 0 1 0 в) 4 -5 7
9 1 3 5 7 -3 4 0 1 -4 9
3 5 7 9 1 -2 1 2 -4 0 5
5 7 9 1 3
7 1 5 3 9

Вариант № 14

А) 4 3 2 1 0 б) 7 0 0 в) 4 -5 7
3 2 1 0 4 10 -19 10 1 -4 9
2 1 0 4 3 12 -24 13 -4 0 5
1 0 4 3 2
0 4 3 2 1

Вариант №15

А) 4 2 5 0 7 б) 4 10 4 в) 5 0 7
4 4 10 4 10 6 5 6 10 4 10
4 6 5 6 9 5 4 8 5 6 9
3 5 4 8 7
10 6 6 -2 8

Вариант № 16

А) 7 0 5 2 4 б) 3 10 4 в) 4 0 8
10 4 4 10 4 5 5 6 4 10 10
4 5 6 9 6 5 4 8 4 6 8

4 3 5 7 8
10 6 6 -2 8

Вариант № 17

А) 1 3 5 2 0 б) 5 7 7 в) 2 3 7
2 5 0 3 1 10 5 5 8 10 7
4 1 1 0 2 6 5 8 8 4 1
2 5 1 0 4
3 2 1 4 5

Вариант № 18

А) 3 1 1 4 2 б) 0 7 2 в) 1
5 0
2 1 1 1 5 4 10 2 9 6 4
2 8 1 0 5 6 9 4 7 5 9
1 9 0 4 7
0 3 0 6 8

Вариант № 19

А) 1 0 3 3 4 б) 8 7 4 в) 5
10 4
1 3 3 1 0 -2 8 2 6 8 9
1 5 8 3 1 5 2 6 5 7 4
3 4 1 2 4
1 2 1 3 5

Вариант № 20

А) 7 3 8 4 1 б) 9 5 2 в) 3 0 1
0 1 4 8 3 3 1 4 4 2 5
7 3 4 1 0 1 2 4 7 5 3
8 7 3 1 4
2 4 6 8 0

Вариант № 21

А) 9 5 0 3 1 б) 5 3 0 в) 4 0 2
4 1 6 2 1 1 4 6 3 6 1
1 3 5 4 6 3 2 5 7 4 1
8 7 3 0 2
6 0 9 1 3

Вариант № 22

А) 1 0 6 4 3 б) 21 0 7 в) 3 7 8
5 2 1 0 3 3 4 5 5 2 1
7 4 1 2 1 14 7 21 8 4 3
5 6 3 2 1
0 4 1 -1 2

Вариант № 23

А) 2 4 8 3 6 б) 4 3 8 в) 2 4 8
4 6 1 2 7 5 4 1 3 7 1
4 2 4 3 4 3 7 5 4 4 1
5 8 2 3 1
0 4 2 4 3

Вариант № 24

А) 2 3 4 1 5 б) 4 3 1 в) 5 4 2
2 0 3 2 4 2 4 7 1 3 5
6 3 1 9 7 0 2 1 8 7 6
-1 3 0 4 5
5 2 1 0 3

Вариант № 25

А) 3 5 6 7 8 б) 4 3 4 в) 1 9 8
1 0 2 3 -1 1 0 1 3 7 9
4 2 1 3 2 2 3 5 0 2 1
0 2 0 1 -1
4 3 2 1 0

Вариант № 26

А) 2 3 1 0 4 б) 4 3 2 в) 3 4
5
2 2 3 9 9 2 4 5 2 1 1
2 8 2 4 2 1 3 1 0 3 4
1 4 3 2 4
6 3 7 0 1

Вариант № 27

А) 1 3 5 0 2 б) 5 3 0 в) 3 1 0
7 8 0 3 1 9 -1 1 5 0 3
2 6 -1 5 3 0 2 4 2 1 1
1 0 3 1 5
4 7 2 1 2

Вариант № 28

А) 6 9 5 4 3 б) 3 3 3 в) 2 3 4
1 7 6 0 -1 6 6 6 1 0 1
4 5 5 8 1 2 4 1 6 8 4
9 0 6 1 1
6 1 4 5 0

Вариант № 29

А) 5 5 1 3 0 б) 4 2 4
в) 2 3 3
9 6 1 1 2 3 -1 1 1 0 1
8 -4 2 6 4 6 5 5 5 3 4
2 6 2 3 0
6 5 9 -1 1

Вариант № 30

А) -2 3 5 2 1 б) 4 3 4
В) 2 5 -1
4 3 2 1 3 3 9 8 3 2 0
1 2 3 -1 3 1 1 1 2 6 1
7 9 1 9 3
0 6 4 6 1

Вариант № 31

А) -4 8 2 3 1 б) 8 0 2 в) 5 2 1
3 7 5 -1 4 6 5 3 4 1 2
0 8 2 2 6 1 0 6 3 6 8
3 7 1 -5 8
0 4 2 4 3

Вариант № 32

А) 8 7 6 5 4 б) 9 1 8 в) 4 3 5

5 6 8 7 4 6 7 1 6 5 3

6 7 1 4 1 3 4 5 1 2 1

2 5 9 1 8

4 5 1 1 1

Контрольные вопросы:

1. Чем определяется порядок детерминантов?
2. Какое применение определителей Вы знаете?

Содержание отчета.

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 2

Матрицы. Действия над матрицами.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) _____Элементы высшей математики_____
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Матрицы. Действия над матрицами.

Цель: научиться решать простейшие матричные уравнения системы линейных уравнений выполнять элементарные действия над матрицами.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Матрицей называется таблица элементов, содержащая m строк и n столбцов.

Элементами матрицы могут быть числа, буквы предметы и т.д. Мы будем рассматривать числовые таблицы матрицы.

Матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. Суммой двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

Произведением числа λ на матрицу A называется матрица, определяемая равенством:

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$$

произведением двух матриц A и B определяется равенством:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон не выполняется AB≠BA

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу.

Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta_A} & \frac{A_{21}}{\Delta_A} & \frac{A_{31}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta_A} & \frac{A_{22}}{\Delta_A} & \frac{A_{32}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{13}}{\Delta_A} & \frac{A_{23}}{\Delta_A} & \frac{A_{33}}{\Delta_A} \end{bmatrix}$$

A_{mn} – алгебраическое дополнение матрицы A_{mn} все определители

$A_{mn} = (-1)^{m+n} M_{mn}$

При умножении матриц А и A^{-1} выполняется переместительный закон

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Система уравнений может быть записана в виде АХ=В, где

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Решение этой системы имеет вид $X = A^{-1}B$ (если $\Delta \neq 0$)

Пример решения задачи решить систему матричным методом

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 14 \\ 3x - y + 2z = [illegible] \\ x + 2y - z = [illegible] \end{cases}$$

АХ=В

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 14 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 21 = 16$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1$$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix} \qquad X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -42 + 25 + 49 \\ 70 - 15 - 7 \\ 98 - 5 - 77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: x=2; y=3; z=1.

Практическая часть.

Дана система линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

найти ее решение матричным способом если координаты (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) (d_1, d_2, d_3) заданы по вариантам:

1. (10, 1, 2), (1, -2, 1), (4, -7, 5), (1, -3, 0)
2. (5, 4, 3), (-3, 5, 7), (2, -3, -4), (19, 31, 31)
3. (2, 1, 3), (-1, 2, 1), (2, -1, -3), (-3, 4, 3)
4. (4, -1, 3), (1, 3, -1), (-2, -1, 5), (10, -1, 1)
5. (4, 1, 3), (-1, 1, 2), (-5, -2, -6), (1, 6, -2)
6. (3, 5, 4), (4, -6, 5), (2, -4, 3), (5, -3, 1)
7. (1, 2, 3), (-2, 3, -2), (3, -4, -5), (6, 20, 6)
8. (5, 4, 2), (1, 3, -3), (-3, 2, 1), (-2, 16, 17)
9. (3, 1, 2), (-2, 5, -2), (1, -2, 1), (10, -15, 3)
10. (5, 2, 3), (-3, -1, -2), (4, -2, 1), (11, -6, 2)

Контрольные вопросы.

Найти: сумму, разность и произведение матриц А и В если:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & \text{[illegible]} \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 2 \\ \text{[illegible]} & 1 & -1 \\ \text{[illegible]} & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Содержание отчета.

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы
- перечень оборудования
- краткие теоретические сведения
- практическую часть
- ответы на контрольные вопросы
- вывод

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 3

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) _____Элементы высшей математики_____

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научиться применять определитель к решению систем. Закрепить навыки вычисления определителей с помощью их свойств.

Оборудование: тетрадь, ручка, калькулятор, учебная литература.

Краткие теоретические сведения.

Метод Крамера состоит в применении к решению систем линейных уравнений формул:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Причем, если Δ не равно нулю, то система имеет единственное решение. Если Δ рано нулю, а хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система решений не имеет. А если все определители равны нулю, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Составим и вычислим главный определитель системы, предварительно упростив его при помощи свойств:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Затем составим и вычислим все вспомогательные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Применим формулы Крамера и получим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Практическая часть.

Даны векторы a (a_1, a_2, a_3), b (b_1, b_2, b_3), c (c_1, c_2, c_3) и d (d_1, d_2, d_3). Причем векторы a, b и c образуют базис вектора d, если

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Варианты:

1. a (1; 2; 3), b (-1; 3; 2), c (7; -3; 5), d (6; 10; 17)

2. a (4; -7; 8), b (9; 1; 3), c (2; -4; 1), d (1; -13; -13)

3. a (8; 2; 3), b (4; 6; 10), c (3; -2; 1), d (7; 4;11)

4. a (10; 3; 1), b (1; 4; 2), c (3; 9; 2), d (19; 30; 7)

5. a (2; 4; 1), b (1; 3; 6), c (5; 3; 1), d (24; 20; 6)

6. a (1; 7; 3), b (3; 4; 2), c (4; 8; 5), d (7; 32; 14)

7. a (1; -2; 3), b (4; 7; 2), c (6; 4; 2), d (14; 18; 6)

8. a (1; 4; 3), b (6; 8; 5), c (3; 1; 4), d (21; 18; 33)

9. a (2; 7; 3), b (3; 1; 8), c (2; -7; 4), d (16; 14; 27)

10. a (7; 2; 1), b (4; 3; 5), c (3; 4; -2), d (2; -5; -13)

Контрольные вопросы:

1. Перечислить свойства определителей.
2. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение.
3. Чем отличается понятие «определитель» от понятия «матрица».

Содержание отчета.

Отчет о проделанной работе должен содержать:

- тему и цель работы;
- перечень оборудования;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 4

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: изучить алгоритм решения методом последовательного исключения неизвестных.

Перечень оборудования: тетрадь, ручка, калькулятор, учебное пособие (литература).

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на a_1, получим

$$\begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1} z = \frac{d_1}{a_1} \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

домножим первое уравнение сначала на a_2 и вычтем из второго полученное, а затем домножим первое уравнение на a_3 и вычтем из 3-го полученное:

$$\begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1} z = \frac{d_1}{a_1} \\ \left(b_2 - \frac{a_2 b_1}{a_1}\right) y + \left(c_2 - \frac{c_2 c_1}{a_1}\right) z = d_2 - \frac{a_2 d_1}{a_1} \\ \left(b_3 - \frac{a_3 b_1}{a_1}\right) y + \left(c_3 - \frac{c_3 c_1}{a_1}\right) z = d_3 - \frac{a_3 d_1}{a_1} \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение системы на коэффициент при У,

$$\begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1} z = \frac{d_1}{a_1} \\ y + \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1} z = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \\ \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1} y + \frac{c_3 a_1 - a_3 c_1}{a_1} z = \frac{a_1 d_3 - a_3 d_1}{a_1} \end{cases}$$

Домножим 2-е уравнение системы на коэффициент при У 3-го уравнения и вычтем из 3-го полученное:

$$\begin{cases} x+\dfrac{b_1}{a_1}y+\dfrac{c_1}{a_1}z=\dfrac{d_1}{a_1} \\ y+\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_3-a_3b_1}z=\dfrac{a_1d_2-a_2d_1}{a_1b_3-a_3b_1} \\ \left(\dfrac{c_3a_1-a_3c_1}{a_1}-\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_3-a_3b_1}\cdot\dfrac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1}\right)z\ \dfrac{a_1d_3-a_3d_1}{a_1}-\dfrac{a_1d_2-a_2d_1}{a_1b_3-a_3b_1}\cdot\dfrac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1} \end{cases}$$

Третье уравнение полученной системы имеет одно неизвестное, которое легко можно найти, затем подставим Z во 2-е уравнение и найдем У, потом из 1-го найдем X. Система решена.

Практическая часть

Дана система из трех уравнений с тремя неизвестными. Коэффициенты системы ai , bi, ci и di заданы по вариантам.

Найти x, y, z.

1)a_i(7;2;1);b_i(4;3;5);c_i(3;4;-2);d_i(2;-5;-13)
2)a_i(2;7;3);b_i(3;1;8);c_i(2;-7;4);d_i(16;14;27)
3)a_i(1;4;3);b_i(6;8;5);c_i(3;1;4);d_i(21;18;33)
4)a_i(1;-2;3);b_i(4;7;2);c_i(6;4;2);d_i(14;18;6)
5)a_i(1;7;3);b_i(3;4;2);c_i(4;8;5);d_i(7;32;14)
6)a_i(2;4;1);b_i(1;3;6);c_i(5;3;1);d_i(24;20;6)
7)a_i(10;3;1);b_i(1;4;2);c_i(3;9;2);d_i(19;30;7)
8)a_i(8;2;3);b_i(4;6;10);c_i(3;-2;1);d_i(7;4;11)
9)a_i(4;7;8);b_i(9;1;3);c_i(2;-4;1);d_i(1;-13;-13)
10)a_i(1;2;3);b_i(-1;3;2);c_i(7;-3;5);d_i(6;10;-17)

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется линейным?
2. Какие действия над уравнениями приводят к равносильным уравнениям?
3. Что называется «решением уравнения»?
4. Сколько решений имеет система если:
   a. Известных больше чем уравнений?
   b. Неизвестных меньше чем уравнений?
   c. Число неизвестных равно числу уравнений?

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- перечень оборудования;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 5

Операции над векторами.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: научиться выполнять действия над векторами, закрепить понятие вектора и его свойства.
Оборудование: тетрадь, ручка, калькулятор, учебная литература.

Краткая теория

Свободный вектор $\vec{a}$ (т. е. такой вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесён в любую точку пространства), заданный в координатном пространстве Ox, y, z, может быть представлен в виде:
$a = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Такое представление вектора $\vec{a}$ называется его разложением по осям координат или разложением по ортам.

Здесь x, y, z – координаты вектора, а $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы, лежащие на осях координат.

Длина (модуль) вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$ и вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы их разложением по ортам

$a = x_1i + y_1j + z_1k$

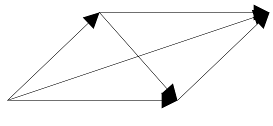
$b = x_2i + y_2j + z_2k$

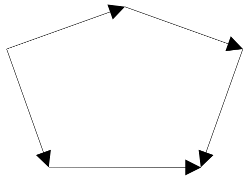
то их сумма и разность определяются по формулам:

$a + b = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$

$a - b = (x_1 - x_2)\vec{i} - (y_1 - y_2)\vec{j} - (z_1 - z_2)\vec{k}$

сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых совмещены, изображается вектором с тем же началом, совпадающим с диагональю параллелограмма, причём начало этого вектора находится в конце вектора $\vec{b}$, а конец в конце вектора $\vec{a}$. Сумма любого числа векторов может быть найдена по правилу многоугольника.





Произведение вектора на скалярный множитель m определяется формулой:

$m\vec{a} = mx\vec{i} + my\vec{j} + mz\vec{k}$

Векторы $\vec{a}$ и $m\vec{a}$ параллельны (коллинеарные) и направлены в одну сторону, если m>0 и противоположные, если m<0.

Вектор $\overrightarrow{AB}$, имеющий начало в точке A(x_1; y_1; z_1) и конец в точке B(x_2; y_2; z_2), раскладывается по ортам по формуле:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 – x_1)\vec{i} + (y_2 – y_1)\vec{j} + (z_2 – z_1)\vec{k}$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B;

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

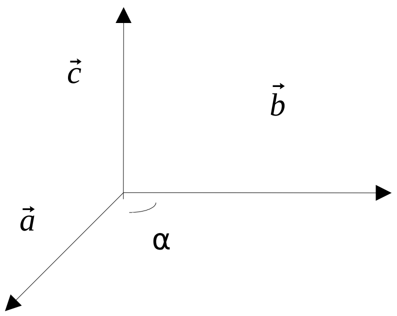
Скалярным произведением двух векторов a и b называется число, равное произведению длин этих векторов на конус угла между ними: $a \cdot b = a\ b\ \cos\alpha$

Если векторы заданы в координатной форме $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$, то

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1\ x_2 + y_1\ y_2 + z_1\ z_2$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом:

1. модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$, где α – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. Вектор с перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. Векторы a, b и c образуют правую тройку векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, т. е. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Смешенное произведение по модулю равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Практическая часть

Вариант 1

1. Даны две точки: A(-3; 1; -1) и B(2; -4; 1). Выразить через орты векторов $\overrightarrow{AB}$ и вычислить его длину.

2. Вычислить координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ если дано разложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по ортам:$\vec{a}=\vec{i}-\overrightarrow{3j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-\overrightarrow{2i}+\vec{k}$.
3. Даны точки A(1; 2; -1) и B(-2; 1; 1). Вычислить расстояние от начала координат до середины отрезка [AB].
4. Вычислить длину вектора $\vec{a}=(\overrightarrow{2m}-\overrightarrow{3n})-(\vec{m}+\vec{n})$,если даны координаты векторов $\vec{m}=(2; 3; 1)$, $\vec{n}=(0; 1; 1)$.
5. Вычислить скалярное произведение ($2\vec{a}$ +$\vec{b}$)•a, если $\vec{a}=(1; 0; 3)$, $\vec{b}=(2; -1; 1)$.
6. При каком значении m векторов $\vec{a}=(4; 6; m)$ и $\vec{b}=(-1/2; -3/4; 3)$ будут коллинеарны ?

Вариант 2

1. Даны координаты точек A(0; -1; 2), B(-1; 4; 3), C(-2; 1; 0) и D(-l; 0; 3).Вычислить координаты вектора $\vec{m}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$.
2. Выразить через орты вектор $\vec{c}=\vec{a}\bullet\vec{b}$ если известно разложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: a3/2$\vec{i}$-3$\vec{j}$+2$\vec{k}$, b=2$\vec{i}$-$\vec{j}$-2$\vec{k}$.
3. Вычислить длину вектора $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$, если известно разложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$.
4. При каком значении m векторы $\vec{a}$= (3; m+1; 1) и $\vec{b}$=(-4; 2; 3m) будут взаимно перпендикулярны?
5. Вычислить длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=(0; 1; 2)$, $\vec{b}=(3; 0; 1)$.
6. Даны точки A(1; -3; 2), B(1; 0; 1), C(2; -4; 0) и D(0; 1;-3).Найти координаты вектора, соединяющего середины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Вариант 3

1. На векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{k}-3\vec{j}$ построен параллелограмм. Выразим в ортах его диагонали.
2. Вычислить длину вектора $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$, если известно разложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по ортам; $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}+10\vec{k}$.
3. Даны точки A(1; -1; 0) и B(-3: -1; 2).Вычислить расстояние от начала координат до данных точек.
4. Вычислить длину вектора ($\vec{a}-2\vec{b}$)-($3\vec{a}-1/2\vec{b}$), если даны координаты векторов $\vec{a}$=(0: 1: 2), $\vec{b}$=(2; 4; 6).
5. Вычислить скалярное произведение $\vec{a}\cdot(3\vec{b}-\vec{a})$, если даны координаты векторов: $\vec{a}$=(1; 0: 4). $\vec{b}$=(2; 2; 1).
6. Вычислить векторное произведение $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot 3\vec{c}$, если даны координаты векторов $\vec{a}=(1; 0; 4)$, $\vec{b}=(0; 1; 2)$, $\vec{c}=(2; 1; 1)$.

Вариант 4

1. Найти координаты вектора $\vec{m}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}$, если даны координаты точек A(4; 0; 5), B(-3; 2; - I), C(-2; 0; 3) и D(4; -5; -2).
2. Доказать что векторы $\vec{a}=5\vec{j}-2\vec{j}+7\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.
3. Вычислить длину вектора $\overrightarrow{AB}$. если даны координаты точек A(4; 0; 5) и B(3; 2;-1).

4. При каких значениях m длины векторов $\vec{a}$=(2ш; 2; 3) и $\vec{b}$=(-6; 2; m) будут равны?
5. Вычислить векторное произведение 3$\vec{m}$·(1/2$\vec{n}$-$\vec{m}$). если даны координаты векторов $\vec{m}$=(2; 1: 0). $\vec{n}$=(4; 2; 2).
6. Найти угол между векторами $\vec{a}$=(5; 4; 3) и осью Ох.

Вариант5

1. Выяснить, комланарны ли векторы $\vec{a}$=(3; 4; 2), $\vec{b}$=$\vec{i}$-$\vec{j}$+$\vec{k}$ и $\vec{c}$=(5;2; 10).
2. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a}$=(1/2; 3/5;-4/3) и $\vec{b}$=(1/6; 1/5; -4/3).
3. Построить вектор $\overrightarrow{OA}$ и найти его длину, если даны координаты точки А(-2; 3; 4).
4. Вычислить скалярное произведете $\vec{a}$·($\vec{b}$-$\vec{a}$), если даны координаты векторов $\vec{a}$=(3; 4; 0), $\vec{b}$=(1; 0; 4).
5. Вычислить векторное произведение $\vec{m}$=(9;3;6), если даны координаты векторов $\vec{m}$=(9; 3; 6), $\vec{n}$=(1; 0; 2).
6. При каких значениях m векторы $\vec{a}$=(2; m; -3) и $\vec{b}$=(1; -2; 1) будут перпендикулярны ?

Вариант 6

1. Вычислить длину вектора $\vec{d}$=-$\vec{a}$+3$\vec{b}$, если известно разложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по ортам: $\vec{a}$=3$\vec{i}$-4$\vec{j}$, $\vec{b}$=2$\vec{i}$+$\vec{j}$+3$\vec{k}$.
2. Доказать, что векторы $\vec{a}$=3$\vec{i}$+4$\vec{j}$-$\vec{k}$ и $\vec{b}$=5$\vec{i}$-3$\vec{j}$+3$\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.
3. Построить вектор $\overrightarrow{MN}$ и найти его координаты и длину, если даны координаты точек M(3; 5; 6) и N(2; -4; 3).
4. Вычислить векторное произведение ($\vec{a}$-2$\vec{b}$)·($\vec{a}$+$\vec{b}$), если даны координаты векторов $\vec{a}$=(1: 0: 1). $\vec{b}$=(3: 2: 1).
5. Даны точки А(-1; 2; 2), В(4; 2; 2), С^4: -2; 2) и D(l; -7; 2). Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
6. Найти третью координату вектора, если даны его координаты х=-4, z=3 и длина вектора равна 13.

Вариант 7

1. Выяснить, компланарны ли векторы $\vec{a}$=(1; -2; 0), $\vec{b}$=2$\vec{i}$+3$\vec{j}$-$\vec{k}$ и $\vec{c}$=3$\vec{i}$-$\vec{j}$-2$\vec{k}$.
2. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45 .Вычислить скалярное произведение векторов, если $\vec{a}$=2$\vec{i}$+2$\vec{j}$. | $\vec{b}$ | =6.
3. Дан четырехугольник с вершинами в точках А(1; 1; 4), В(2; 3; -1), С(-2; 2: 0) и D(3; 0: 5). Является ли данный четырёхугольник параллелограммом?
4. Найти площадь треугольника, координаты вершин которого А(6; 2; 0). В(2; 0; 0), С(8; 0; 0).
5. Вычислить косинус угла между векторами $\vec{a}$ и 2$\vec{b}$,если даны координаты векторов $\vec{a}$=(3; 1; 2), $\vec{b}$=(1;3/2;1/2) .
6. Вычислить модуль векторного произведения $\vec{a}$=2$\vec{i}$+$\vec{j}$ и $\vec{b}$=$\vec{i}$-2$\vec{j}$, если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен arcsin0.8.

Вариант 8

1. Вычислить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-1.5\vec{j}+2.5\vec{k}$;
2. В треугольнике ABC даны координаты вершин A(-1; 2; 3), B(2; -1; 0) и C(-4; 2; -3).Вычислить периметр треугольника.
3. Найти угол между векторами $\vec{m}=(1; 0; \sqrt{3})$ и осью аппликат.
4. Вычислить длину вектора $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если даны координаты векторов $\vec{a}=(0.1; 0.1; 0)$, $\vec{b}=(10; 0; 10)$.
5. Вычислить площадь параллелограмма . построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$.
6. Вычислить угол между векторами $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

Контрольные вопросы.

1. Сформулировать признаки перпендикулярности векторов.
2. Сформулировать признак коллинеарности векторов.
3. Являются ли векторы, лежащие на скрещивающихся прямых компланарными.

Содержание отчёта.

Отчёт о проделанной работе должен включать:

- Тему и цель работы;
- Перечень оборудования;
- Краткую теорию;
- Практическую часть по варианту;
- Ответы на контрольные вопросы;
- Вывод

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 6

Составление уравнений прямых и кривых 2-го порядка, их построение.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) ______Элементы высшей математики______
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

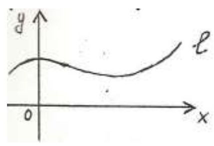
Цель: Научиться составлять уравнение прямой по точке и направляющему вектору, по точке и нормальному вектору, по двум заданным точкам.

Перечень оборудования: линейка, карандаш, калькулятор, ручка.

Краткие теоритические сведения.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат x 0 y.

Рассмотрим в этой системе линию l, выбранную произвольно. Уравнение данной линии (в выбранной на плоскости системе координат) называется такое уравнение с переменными X и Y, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой линии.



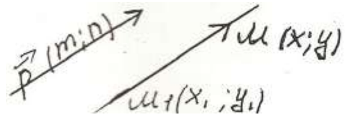
В общем виде уравнение линии в прямоугольных координатах записывается так: F(X; Y)=0.

<u>Теорема.</u> Всякая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени с двумя переменными X и Y; всякое уравнение вида Ax+By+C=0 при любых действительных коэффициентах A, B и C, исключая одновременное равенство нулю коэффициентов A и B, определяет прямую.

В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнения.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1 (X_1; Y_1), с заданным нормальным вектором $\bar{n}(A;B)$, $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ перпендикулярный этой прямой. Любая прямая имеет бесконечное множество нормальных векторов, которые коллинеарны между собой.

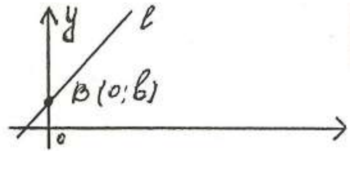
Уравнение прямой, проходящей через данную точку M (x, y), с заданным напрявляющим вектором $\bar{p}(m;n)$



$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$$

Направляющим вектором прямой называется нулевой вектор, параллельный этой прямой. Любая прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, которые коллинеарны между собой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:



$y = kx + b$.

Угловым коэффициентом прямой называется tg угла наклона прямой к положительному направлению оси абцисс: $k = tg\alpha$

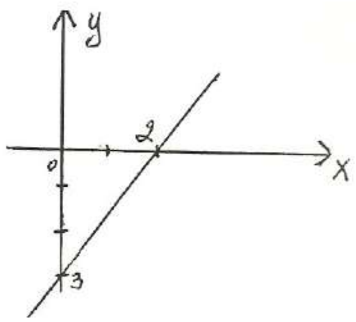
Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$, где a и b – длины отрезков, отсекаемых прямой l на осях координат, взятые с соответствующими знаками (в зависимости от того, положительную или отрицательную оси координат пересекает прямая l).

Так уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$ или $3x-2y-6 = 0$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки M_1 $(x_1; y_1)$ и M_2 $(x_2; y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Угол между двумя прямыми можно вычислить по формуле:



Cosα = [illegible]

или через скалярное произведение векторов.

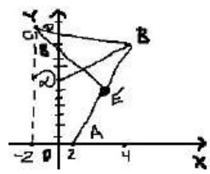
<u>Пример решения задачи.</u>

Треугольник задан вершинами A(2;0), B(4;8), C(-2;10). Составить уравнение прямой AC, высоты BD, медианы CE. Найти угол B.

Решение.

Построим треугольник в системе координат.

1) Прямая AC проходит через две заданные точки A и C, поэтому поэтому воспользуемся формулой: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$



Получим: $\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-0}{10-0}$ => $10x-20 = -4y$; $5x+2y-10 = 0$ – уравнение прямой AC.

2) Прямая BD перпендикулярна AC => $\overline{AC}$ [illegible] является нормальным по отношению к $\overline{BD}$, тогда пользуемся формулой A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0, получим: -4(x-4)+10(y-8) = 0 или -4x+10y-64 = 0 => 2x-5y+32 = 0 – уравнение высоты BD.

3) Медиана CE проходит через две точки: C и середину отрезка AB.

$x_E = \frac{[illegible]}{2}$ [illegible] $= 3$; $y_E = \frac{[illegible]}{2}$; $y_E = \frac{[illegible]}{2}$ [illegible]

Следовательно, [illegible] => 6x-18=-5y+20 или 6x+5y-38 = 0.

4) Угол B = $\overline{BC}$ [illegible] $\overline{BA}$

Cos(угла)B = $\frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} \cdot \frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

$\overline{BC}$ [illegible] $\overline{BA}$ [illegible]

cosB = [illegible]

Угол B = arccos (-[illegible]) ; Задача решена.

Практическая часть

<u>Задача.</u> Дан треугольник с вершинами A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3).

Составить:

1) Уравнение прямой **a** параллельной стороне AC и проходящей через точку B;
2) Уравнение высоты треугольника, опущенной из вершины C;
3) Уравнение медианы, проведенной из вершины A;

Найти:

1) Угол B – треугольника;

2) Площадь треугольника;
3) Сделать чертеж;

Вариант:

1) A (4;2), B (0;7), C (0;2)
2) A (4;4), B (4;10), C (2;8)
3) A (4;6), B (6;9), C (2;10)
4) A (3;5), B (8;7), C (5;10)
5) A (10;6), B (-2; 8), C (6;8)
6) A (1;8), B (5;2), C (5;7)
7) A (6;6), B (4;9), C (4;6)
8) A (7;2), B (5;7), C (5;3)
9) A (8;6), B (10;5), C (5;6)
10) A (7;7), B (6; 5), C (3;5)

Контрольные вопросы:

1. В чем состоит условие перпендикулярности векторов?
2. В чем состоит условие параллельности векторов?
3. Как выглядит уравнение прямой параллельной оси OX?
4. Как выглядит уравнение прямой перпендикулярной оси OX?
5. Как найти расстояние между двумя точками?
6. Приведите примеры линий второго порядка?

Содержание отчета.

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;

- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 7

Вычисление предела. Исследование функции одной переменной на непрерывность.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) <u>Элементы высшей математики</u>
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научится вычислять пределы различных функций в точке и на бесконечности с применением формулы замечательных пределов. Научится исследовать функцию на непрерывность в точке.
Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Число B называется пределом функции f(x) в точке a (или при x, стремящейся к a), если для любой последовательности значений
аргумента xn $\neq$a, n є N, сходящейся к a, последовательность соответствующих значений функции f(xn), n є N сходится к B.

$$\lim_{x \to a} f(x) = B$$

Свойства пределов:

1)Предел алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме преде6лов этих функций.

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm j(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} j(x)$$

2) Предел произведения функций равен произведению пределову этих функций.

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Следствие: постоянный множитель можно вынести за знак предела, т. е.

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

3)Предел отношения двух функций равен отношению пределов, если последние существует и предел делителя отличен от нуля.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

При помощи этих свойств, алгебраических преобразований и формул замечательных пределов

($\lim_{x \to a} \frac{\sin X}{X} = 1$ и $\lim_{x \to a} (1 + \frac{1}{X}) = e$)

будем вычислять значение пределов различных функций.

Функция f(x), x є (a; b) называется непрерывной в точке xo є (a; b), если предел функции f(x) в точке xo существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(x_o)$$

Согласно данному определению непрерывность функции f в точке xo означает выполняемость следующих условий:

а) функция f должна быть определена в точке xo;
б) у функции f должен существовать предел в точке xo;
в) предел функции f в точке xo совпадает со значением функции в этой точке.

Практическая часть

Вычислить пределы заданных функций (по вариантам) и исследовать на непрерывность функцию g(x).

Вариант № 1

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3-x)[\ln(1-x)-\ln(2-x)]$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 2 и построить график функций:
y= [illegible]

Вариант № 2

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 2 и построить график функций:
y= [illegible] ;

Вариант № 3

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x}{x+3x^2+2x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$; 3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)(\ln(x+2)-\ln x)$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 4 и построить график функций:

y= [illegible];

Вариант № 4

1) Lim $\frac{3x^2+4x-5}{6x^2-2x+1}$; 2) Lim $\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$; 3) Lim $\frac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$;

x → ∞ x → 2 x → 0

4) Lim $\frac{1-\cos x}{x\sin x}$; 5) Lim $(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;

x → 0 x → 1

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 1 и x = 3 и построить график функций:

[illegible];

Вариант № 5

1) Lim $\frac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$; 2) Lim $\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; 3) Lim $\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

x → ∞ x → 1 x → 9

4) Lim $\frac{arctg\,3x}{5x}$; 5) Lim (3x-2)(ln(2x-1)-ln(2x+1));

x → 0 x → ∞

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 2 и построить график функций:

[illegible];

Вариант № 6

1) Lim $\frac{3x^4-7x^2+4}{3x^4+5x-2}$; 2) Lim $\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; 3) Lim $\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$;

x → ∞ x → 4 x → 4

4) Lim $\frac{\cos 3x-1}{x^2 tg\,2x}$; 5) Lim $(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$;

x → 0 x → 1

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 1 и построить график функций:

[illegible]

Вариант № 7

1) Lim $\frac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5}$; 2) Lim $\frac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$; 3) Lim $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

$x \to \infty$ $\qquad$ $x \to 5$ $\qquad$ $x \to 4$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos^2 x}{x \sin 2x}$; $\qquad$ 5) $\lim\limits_{x \to -2} (x+2)(\ln(2x+3) - \ln(2x-4))$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = π/2и построить график функций:

$y = $ [illegible];

Вариант № 8

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 + 8x - 2}{x^3 - 2x^2 + 1}$; $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$; $\qquad$ 3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{3x} - x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} x\,\mathrm{tg}\,3x$; $\qquad$ 5) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2)^{\frac{5x}{x^2 - 1}}$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 1 и построить график функций:

$y = $ [illegible];

Вариант № 9

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 1}$; $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{3x^2 - 4x + 1}$; $\qquad$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x}$; $\qquad$ 5) $\lim\limits_{x \to \infty} (3 - x)(\ln(1 - x) - (2 - x))$

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 2 и построить график функций:

$y = $ [illegible];

Вариант № 10

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{6x^2 + 3x - 4}$; $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$; $\qquad$ 3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{x - 2} + 1}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin 2x\, ctn^2 3x$; $\qquad$ 5) $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 3)^{\frac{3x}{x^2 - 2}}$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = π/2 и x = π и построить график функций:

[illegible];

Вариант № 11

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^6 - x^3 + 2x}{2x^6 - 1}$;   2) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 21}$;   3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{3x}$;   5) $\lim\limits_{x \to \infty} (x-4)\,(\ln(2-3x) - \ln(5-3x))$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 2 и построить график функций:

[illegible];

Вариант № 12

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$;   2) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$;   3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{5 + x} - \sqrt{5 - x}}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\, 3x}{5x}$;   5) $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1)^{\frac{3x}{x-1}}$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 1 и построить график функций:

[illegible]

Вариант № 13

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^5 - 3x^2 + 8}{2x^5 + 2x - 1}$;   2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$;   3) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} x\, ctg 3x$;   5) $\lim\limits_{x \to \infty} (3-x)(\ln(1-x) - \ln(2-x))$;

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 2 и построить график функций:

[illegible];

Вариант № 14

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^6 - x^3 + 2}{2x^6 - 1}$;   2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$;   3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2}$;

4) Lim $\frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x}$; 5) Lim $(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$;
x → 0 x → 1

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x = 4 и построить график функций:

[illegible];

Вариант № 15

1) Lim $\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$; 2) Lim $\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; 3) Lim $\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;
x → ∞ x → 3 x → 0

4) Lim $x \sin 2x ctg^2 3x$; 5) Lim(3x–2)(ln(2x–1)–ln(2x+1));
x → 0 x → ∞

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x =3 и построить график функций:

[illegible];

Вариант № 16

1) Lim $\frac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; 2) Lim $\frac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$; 3) Lim $\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;
x → ∞ x → 5 x → 9

4) Lim $\frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{x^2}$; 5) Lim(x–4)(ln(2–3x)–ln(5–3x));
x → 0 x → ∞

6)Исследовать функцию на непрерывность в точках x = 0 и x =2 и построить график функций:

[illegible];

Контрольные вопросы

1. Что называется односторонним пределом функции?
2. Что называется точкой разрыва первого рода? Второго рода?
3. Какая функция называется непрерывной на интервале?
4. Какие следствия из замечательных пределов Вы знаете?

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- перечень оборудования;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 8

Производная функции одной переменной и ее приложение к исследованию функции.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научится дифференцировать сложные функции явно и не явно заданные; научиться исследовать функцию на экстремумы и точки перегиба.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. К этому понятию приводят задачи естествознания и техники, в которых требуется найти мгновенную скорость изменения какой-либо функции. Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Производные элементарных функций находятся на основе определения и правил дифференцирования.

1. $C'=0$ 2.$x'=0$ 3.$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$

4. ¿¿ 5.$(Cu(x))'=Cu'(x)$

6. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Производная сложной функции находится на основе теоремы: *дифференцируемые* функции своих аргументов, то производная сложной функции $y=f(\varphi(x))$ существует и равна произведению производной функции “*y*” по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента “*u*” по независимой переменной “x”: $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

При помощи понятия производной можно исследовать функцию на экстремумы. Для этого надо:

- найти область определения функции;
- найти производную;
- приравнять производную к нулю и решить получившееся уравнение;
- разбить область определения функции критическими точками на интервалы;
- определить знак производно на каждом интервале и сделать вывод о существовании экстремума в точке;

Для исследования функции на точки перегиба необходимо:

- найти вторую производную функции;
- приравнять её к нулю и решить получившееся уравнение;
- разбить область определения функции критическими точками $2^{го}$ рода на интервалы, и определить знак второй производной на каждом интервале;
- сделать вывод о существовании точек перегиба;
- найти значение функции в точках перегиба.

Практическая часть

Вариант №1

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=\sqrt[4]{x^2+3x}-\sqrt[5]{(6x-1)^2}$; б) $Y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$;

в) $Y=arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}$; г) $Y=x^{\frac{1}{x}}$;

д) $XsinY-YcosX=0$.

2. Найти экстремумы функций:

$Y=\frac{-1}{3}x^3+2x^2+1$.

Вариант №2

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=\frac{2x}{\sqrt{1+x}}$; б) $Y=\sin^2 3x$;

в) $Y=XarcsinX+\sqrt{1-x^2}$; г) $Y=X^{ex}$;

д) $e^{xy}-X^2+Y^2=0$.

2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости:

$$Y=6X^2+X^3+7X^2-3$$

Вариант №3

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=\sqrt[3]{\frac{1+X^3}{1-X^3}}$; б) $Y=\sqrt{1+\ln^2 X}$;

в) $Y=\arccos\frac{1}{2}$; г) $Y=X^{arctgX}$;

д) $YsinX+\cos(X+Y)=cosY$.

2. Найти экстремумы функции:

$$Y=X^3-3X$$

Вариант №4

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; б) $Y=\frac{4\,lnx}{1-lnx}$;

в) $Y=arctg\sqrt{x^2-1}$; г) $Y=(\cos x)^{cosx}$;

д) $xsiny-ycosx+y^2=0$.

2. Найти точки перегиба графика функций:

$$Y=\frac{1}{3}x^3-3x^2-8x-4$$

Вариант №5

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; б) $Y=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x$;

в) $Y=argtg\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$; г) $Y=(lnx)^x$;

д) $x-y+e^7 arctgx=0$

2. Найти точки перегиба графика функции:

$$Y=x+\sqrt[3]{x^5}-2$$

Вариант №6

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=x\sqrt{1+x^2}$; б) $Y=\ln\sqrt{\frac{1+tgx}{1-tgx}}$;

в) $Y=arctgx(sinx)$; г) $Y=2^x e^{-x}$;

д) $lny=\arcsin\frac{x}{y}$.

2. Найти экстремумы функции:

$$Y=\frac{1}{3}x^3-x^4+5$$

Вариант №7

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=5\sqrt[5]{4x+3}-\dfrac{2}{\sqrt{x^3+x+1}}$;

б) $Y=\ln\sqrt{\dfrac{1-sinx}{1+cosx}}$;

в) $Y=\arccos\left(tgx\right)$;

г) $Y=x^2 e^{cosx}$;

д) $2x^2+xy-y^3=0$.

2. Найти экстремумы функции:

$$Y=x^4-2x^3+3$$

Вариант №8

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\dfrac{5}{x}}$;

б) $Y=\ln ¿$;

в) $Y=\dfrac{arccosx}{x}$;

г) $Y=\left(cosx\right)^{x^2}$;

д) $2x^2+xy-y^3=0$.

2. Найти экстремумы функции:

$$Y=\frac{x}{\left(x-1\right)^2}$$

Вариант №9

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$;

б) $Y=\dfrac{lnx}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $Y=\arccos e^x$;

г) $Y=x^{arcsinx}$;

д) $lny=arctg\dfrac{x}{y}$.

2. Найти точки перегиба графика функции:

$$Y=\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$$

Вариант №10

1. Найти производные следующих функций:

а) $Y=x+\sqrt[5]{\frac{1+x^5}{1-x^5}}$; б) $Y=tg\,3\left(x^3+3\right)$;

в) $Y=arctg\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$; г) $Y=x^{tgx}$;

д) $xy+\arcsin\left(x+y\right)^2=0$.

2. Найти интервалы выпуклости функций:

$$Y=\frac{x^3}{2\left(x+1\right)^3}$$

Контрольные вопросы

1) Что называется производной?

2) В чём состоит геометрический смысл производной?

3) Какая точка называется точкой максимума?

4) Сформулируйте достаточное условие существования экстремума функции.

5) В чём состоит необходимое условие точек перегиба?

Содержание отчета

Отчёт по проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;
- перечень оборудования;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 9

Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: Научиться находить производные и дифференциалы высших порядков, пользуясь при необходимости правилом Лопиталя.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория.

Производной второго порядка (второй производной) функции $y=f(x)$ называется производная от её производной. Вторая производная обозначается так :

$$y'' \text{ или}, \frac{d^2x}{dx^2}, \text{или } f''(x).$$

Если *S = f(x)* – закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\frac{d^2S}{dt^2}$ есть ускорение этого движения. Аналогично производная третьего порядка функции *y=f(x)* есть производная от производной второго порядка: *y''' = (y'')'*.

Вообще, производной n-ого порядка от функции *y=f(x)* называется производная от производной (n-1)-го порядка: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.Обозначается n-ая производная : $y^{(n)}$,или $\frac{d^n y}{dx^n}$, или $f^n(x)$.

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Правило Лопиталя.

Пусть функции *f(x)* и $\varphi(x)$ дифференцируемые в ξ- окрестности точки x_0 и $\varphi(x)\neq 0$. Если$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$или$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$ при условии, что существует предел отношения производных.

Пример выполнения задания

Найти y''', если y =$\ln\frac{x-1}{x+3}$

Решение.

y’$=\frac{1}{\frac{x-1}{x+3}}\cdot\frac{x+3-x+1}{(x+3)^2}=\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{4}{(x+3)^2}=\frac{4}{x^2+2x-3}$

y’’$=\frac{-4(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-8(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}$

y’’’$=\frac{-8(x^2+2x-3)^2+(8x+8)\cdot 2(x^2+2x-3)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^4}=\frac{8(x^2+2x-3)(-x^2-2x+3+4x^2+8x+1)}{(x^2+2x-3)^4}=$
$\frac{8(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x-3)^3}$

Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-2x-1}{\text{¿¿¿}}\text{¿}$

Решение.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-2x-1}{\text{¿¿¿}}\text{¿}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5e^{5x}-2}{2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3}=\infty$,т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}=\infty$

Практическая часть

Вариант 1.

1. Найти y’’, если y$\text{¿}-\frac{22}{x+5}$

2. Найтиy’’’, еслиy= 2^x+2^{-x}

3.Вычислить: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$

Вариант 2.

1. Найти y’’, если y$\text{¿}\frac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$

2. Найтиy’’’, еслиy=$\frac{x}{6(x+1)}$

3.Вычислить: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$

Вариант 3.

1. Найти y’’, если y¿ $\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x$

2. Найтиу’’’, еслиу= $\frac{1}{2}$ ¿¿

3.Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$

Вариант 4.

1. Найти y’’, если y¿ $-\frac{1}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x$

2. Найтиу’’’, еслиу= $(2x+3)^3\sqrt{2x+3}$

3.Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{10}}$

Вариант 5.

1. Найти y’’, если y¿ $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$

2. Найтиу’’’, еслиу= $x^{15}\sqrt{x}$

3.Вычислить: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\ln(x-4)}{\ln(e^x-e^4)}$

Вариант 6.

1. Найти y’’, если y¿ $2(x-\sin x)$

2. Найтиу’’’, еслиу= $\frac{1}{2x+1}$

3.Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3xe^x+3x^2}{arctg\,x-\sin x-\frac{3x}{6}}$

Вариант 7.

1. Найти y’’, если y¿ 5 ¿

2. Найтиу’’’, еслиу= 2^x-3^{-x}

3.Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\,arctg\,x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$

Вариант 8.

1. Найти y’’, если y¿ $\arccos\sqrt{x}$

2. Найтиу’’’, еслиу= $\frac{2x-5}{3x+4}$

3.Вычислить: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{(\sin 5x)^2}$

Вариант 9.

1. Найти y'', если y¿$\sqrt{x-x^2}$

2. Найтиу''', еслиу=$5-3(\cos x)^2$

3.Вычислить: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$

Вариант 10.

1. Найти y'', если y¿$\sqrt{x^3-4x}$

2. Найтиу''', еслиу=$2\sin x\sqrt{(\cos x)^2}$

3.Вычислить: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$

Вариант 11.

1. Найти y'', если y¿$\sqrt[3]{3x-x^4}$

2. Найтиу''', еслиу=¿¿

3.Вычислить: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^{x}-e}$

Вариант 12.

1. Найти y'', если y¿$3(\cos x)^3-\sin x$

2. Найтиу''', еслиу=$\ln e\, x^3$

3.Вычислить: $\lim_{x\to \infty}\frac{x-\sin x}{3x^2}$

Вариант 13.

1. Найти y'', если y¿$3(\sin x)^2-4\cos x$

2. Найтиу''', еслиу=$\ln\sqrt{x^2-1}$

3.Вычислить: $\lim_{x\to \infty}\frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x+e^{x}}$

Вариант 14.

1. Найти y'', если y¿$2\arcsin\sqrt{3x-1}$

2. Найтиу''', еслиу=$\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

3.Вычислить: $\lim_{x\to 1}\frac{arctg\, x-x}{x^2-1}$

Вариант 15.

1. Найти y’’, если y¿$3\,arctg\sqrt{x^2-1}$

2. Найтиy’’’, еслиy=$\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$

3.Вычислить: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}$

Контрольные вопросы

1. Что называется производной 5-го порядка и как её найти?
2. Что называется дифференциалом функции?
3. В чём состоит геометрический смысл 2-ой производной?
4. В чём состоит геометрический смысл дифференциала.
5. Как применить правило Лопиталя, если при вычислении предела получилась неопределённость вида 0·∞?

Содержание отчёта

Отчёт о проделанной работе должен содержать:

- тему и цель работы;
- перечень оборудования;
- краткую теорию;
- практическую часть по вариантам;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 10

Полное исследование функции. Построение графиков.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научиться исследовать функцию методом дифференциального исчисления и строить график.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Общая схема построения графиков функции:

1. Найти область определения функции.
2. Найти область значения функции.
3. Исследовать функцию на четность и нечетность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднение)
6. Найти асимптоты графика функции. Вертикальные асимптоты x=0 существуют при условии $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

   Наклонные асимптоты задаются уравнением $y = kx + b$, причем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \to\infty} (f(x) - kx)$.
7. Найти интервалы выпуклости возрастания и убывания функции и её экстремумы.
8. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки её перегиба.
9. Построить график функции.

Примеры построения графика функции на основе её исследования.

Исследовать функцию и построить её график.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

1. Найдем область определения функции: дробь существует при условии, что её знаменатель отличен от нуля, известно x-1≠0 x≠±1, Тогда

D(b): xЄ(-∞;∞)U(-1;1)U(1;∞)

2. Найдем область значений функции: данная функция сможет принимать любое значение, известно E(b): yЄ(-∞;∞)

3. $y=\frac{x}{x^2-1}$; $y(-x)=\frac{x}{(-x)^2-1}=\frac{--x}{x^2-1}$ $, тогда\, y(x)=-y(-x),$значит функция нечетная и её график симметричен относительно начала координат.

4. Данная функция не является периодической.

5. OX: $y=0\Rightarrow\frac{x}{x^2-1}=0, x=0,$ получим точку (0;0)

   OY: x=0⇒y=0, значит график функции пересекается с осями координат только в точке (0;0)

6. Вертикальные асимптоты графика функции проходят через точку разрыва

   X=1 и x=-1. Найдем наклонные асимптоты, заданные уравнением y=kx+b.

   R=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}:x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1}=0$

   b= $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}-OX\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$,известно y=0,

   горизонтальная асимптота.

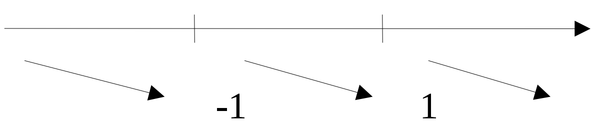
7. $y'=\frac{x^2-1-x2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2-1)^2}$

   Найдем точки, в которых экстремумы возможны, в них производная равна нулю или не существует, значит либо $x^2+1=0\, либо$

   $x^2-1=0.$

   $x^2+1=0$ при любых значениях, так как $x^2\neq1, a\, x^2+1=0$при x=1 и x=-1, это и будут критические точки первого рода

   \-   -   -



   -1   1

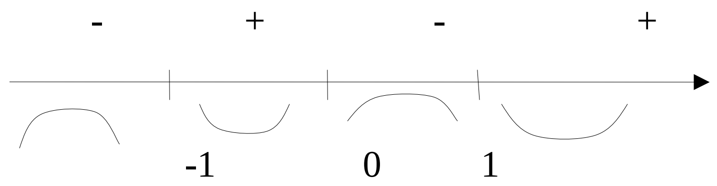
Определим знак производной на каждой из полученных интервалов $y'<0$ на всех интервалах, значит функция убывает на всей области определения и экстремумов нет.

8. $y''=\frac{-2x(x^2-1)^2-(-x^2-1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)(-x^2+1+2x^2+2)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

   Находим критические точки второго рода.

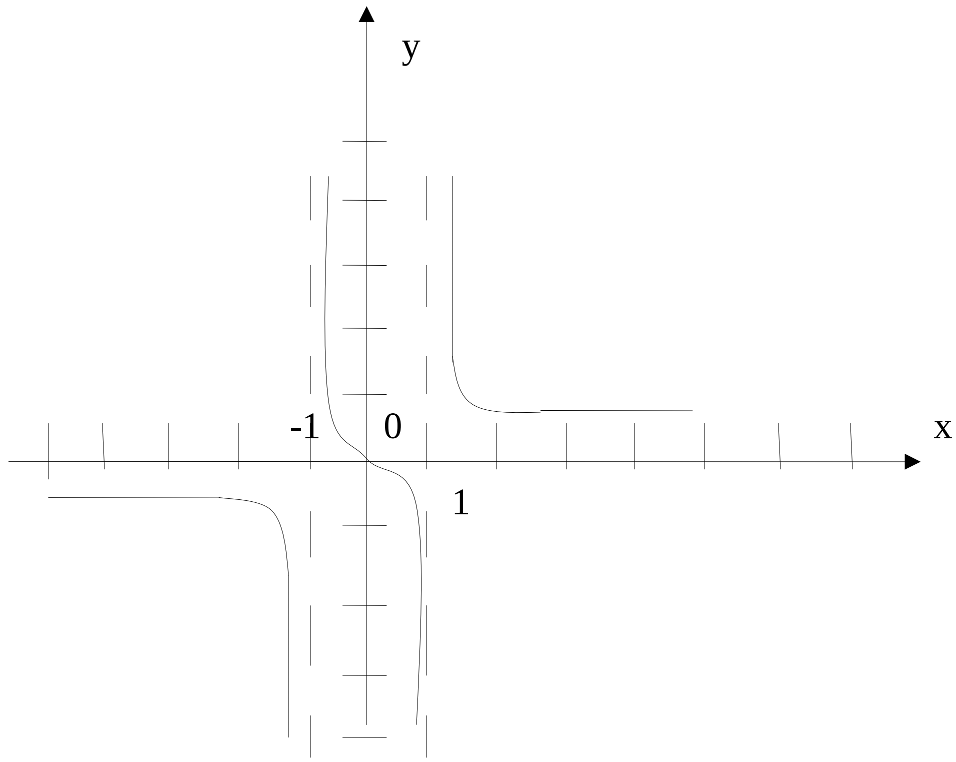
   $y''=0$, если $2x(x^3+3)=0 \Rightarrow x_1=0$

   y'' не существует, если $-1=0 \Rightarrow x^2=1, x_3=-1$



X=0 – точка перегиба y(0)=0

Строим график функции.



Исследовать функцию и построить график

Вариант 1: $y=\frac{x^2+1}{x^2}$

Вариант 2: $y=\frac{1}{1+x^2}$

Вариант 3: $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

Вариант 4: $y=\frac{x^3+1}{x^2}$

Вариант 5: $y=\frac{x}{3-x^2}$

Вариант 6: $y=\frac{1}{1-x^{\sqrt{2}}}$

Вариант 7: $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

Вариант 8: $y=\frac{x}{(x-1)^2}$

Вариант 9: $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$

Вариант 10: $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$

Вариант 11: $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$

Вариант 12: $y=xe^{-x}$

Вариант 13: $y=e^{\frac{1}{x}}$

Вариант 14: $y=\frac{\ln x}{x}$

Вариант 15: $y=\ln(2x^2+3)$

Контрольные вопросы

1. Что называется графиком функции?
2. Какая функция называется непрерывной?
3. Какие виды разрыва графика функции существуют?
4. Что называется экстремумом функции?
5. Сформулируйте достаточное условие существования точек перегиба.

Содержание отчета.

Отчет должен содержать:

- тему и цель работы;
- перечень оборудования;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 11

Основные методы интегрирования.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научиться применять различные методы к вычислению неопределенного интеграла.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Интегрирование – это действие обратное дифференцированию. С его помощью по производной можно восстановить функцию, от которой эта производная была найдена.

Дифференцируемая функция F(x) определенная на интервале xЄ(a; b) называется первообразной для функции f(x), если F'(x)=f(x) для каждого xЄ(a; b), так для функции F(x)=cosx первообразной служит функция F(x)=sinx, т.к. (sinx)'=cosx. Для заданной функции ее первообразная определяется однозначно.

Теорема: Если F(x) – первообразная f(x) на некотором промежутке, то и функция F(x)+C, где C – любая постоянная, также является первообразной для функции f(x) на этом промежутке. Справедливо и обратное утверждение: каждая функция, являющаяся первообразной для f(x) в данном промежутке, может быть записана в виде F(x)+C.

Совокупность всех первообразных функций f(x) на интервале xЄ(a; b) называют неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначают $\int (x)\,dx = F(x) + C$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int (x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int (x)dx$
5. $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int (x)dx = \int \varphi(x)dx$

Основными методами интегрирования являются: непосредственное интегрирование, метод замены переменной или подстановки и интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование предусматривает преобразование подынтегрального выражения до табличного вида с помощью алгебраических, тригонометрических формул и применение основных свойств интеграла. Сущность метода подстановки состоит в том, что путем введения новой переменной данный интеграл сводится к новому, который сравнительно легко берется.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующий порядок:

1) Часть подынтегральной функции заменить новой переменной;
2) Найти дифференциал от обеих частей замены;
3) Все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);
4) Найти полученный табличный интеграл;
5) Сделать обратную замену.

При интегрировании «по частям» необходимо воспользоваться формулой: $\int Ud⇒=U⇒-\int ⇒dU$

Примеры решения задач

Найти интегралы:

1) $\int (3¿-e^x+cosx-\frac{1}{\sin^2 x})dx¿$

2) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-x^2+3}{\sqrt{x}}dx$

3) $\int \frac{sinx\,dx}{\sqrt{1-2cosx}}$

4) $\int (x-1)^2 e^x dx$

Решение:

1)

$$\int \left(3-e^x+cosx-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\int 3dx-\int e^x dx+\int cosxdx-\int \frac{dx}{\sin^2 x}=3x-e^x+sinx++ctgx+c$$

2)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}-x^2+3}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{x^{\frac{1}{3}}-x^2+3}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int \left(x^{\frac{-1}{6}}-x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{-1}{2}}\right)dx=¿\int x^{\frac{-1}{6}}dx-\int x^{\frac{3}{2}}dx++3\int x^{\frac{-1}{2}}dx=\frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5}-$$

3) $\int \frac{sinx\,dx}{\sqrt{1-2cosx}}=$

$$\left|\begin{matrix}1-2cosx=t\\2sinx\,dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int \frac{2sinxdx}{\sqrt{1-2cosx}}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{-1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=¿\sqrt{t}+C=\sqrt{1-2cosx}+C$$

4)

$$\int (x-1)^2 e^x dx=¿\left|\begin{matrix}(x-1)^2=u & e^x dx=d⇒\\2(x-1)dx=du & e^{x=d⇒}\end{matrix}\right|=(x-1)^2 e^x-\int e^x 2(x-1)dx=¿\left|\begin{matrix}x-1=u & e^x dx=d⇒\\dx=du & e^x=⇒\end{matrix}\right|=(x$$

Практическая часть

Вариант 1

Найти интегралы:

1¿ $\int (2-3e^{x}+x)\,dx$

2) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x}}\,dx$

3) $\int (3x^{5}-cosx-1)\,dx$

4) $\int \frac{x^{\frac{-1}{2}}+2}{\sqrt{x}}\,dx$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

6) $\int x e^{x}\,dx$

Вариант 2

Найти интегралы:

1) $\int (7x^{6}-sinx+3)\,dx$

2) $\int \frac{5-\sqrt[3]{x^{2}}}{x}\,dx$

3) $\int \left(7-\frac{1}{2\,co\,s^{2}x}-x^{2}\right)dx$

4) $\int \frac{x^{\frac{-1}{3}}-1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\,dx$

5) $\int \cos 3x dx$

6) $\int x\,arctgx\,dx$

Вариант 3

Найти интегралы:

1) $\int \left(x^{4}-\frac{1}{2x}-4\right)dx$

2¿ $\int \frac{3+x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

3) $\int \left(3-\frac{1}{3\,sin^{2}x}+2\right)dx$

4) $\int \frac{x^{\frac{-2}{3}}-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

5) $\int \sqrt[3]{¿¿¿}$

6) $\int x^{2}\,lnxdx$

Вариант 4

Найти интегралы:

1) $\int \left(3x^{2}-\frac{2}{1+x^{2}}-5\right)dx$

4) $\int \frac{x^{\frac{-1}{4}}-2}{\sqrt[4]{x^{3}}}\,dx$

2) $\int \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

5) $\int \frac{cosx\, dx}{4+3\, sinx}$

3) $\int (x-\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}+2)dx$

6) $\int x\, lnx\, dx$

Вариант 5

Найти интегралы:

1) $\int (2\, cosx-5\, x^4+3)dx$

4) $\int \frac{x^{\frac{-3}{4}}-5}{\sqrt[4]{x}}dx$

2) $\int \frac{4+x^2}{\sqrt{x}}dx$

5) $\int \sin\, (\frac{\pi}{7}-x)dx$

3) $\int (5\, e^x-x^3-4)dx$

6) $\int x\, cosx\, dx$

Вариант 6

Найти интегралы:

1) $\int (3\, sinx+4\, x^3-1)dx$

4) $\int \frac{x-5}{x^2}dx$

2) $\int \frac{2-\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx$

5) $\int \frac{cosxdx}{4+3\, sinx}$

3) $\int (5-\frac{3}{co\, s^2\, x}+2\, x^3)dx$

6) $\int x\, arctgx\, dx$

Вариант 7

Найти интегралы:

1) $\int (2-\frac{x}{3}+\frac{5}{1+x^2})dx$

4) $\int \frac{x\sqrt{x}-x^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{x}}dx$

2) $\int \frac{2-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$

5) $\int tgx\, dx$

3) $\int (5\, x^4-\frac{1}{3\, x}-4)dx$

6) $\int x^2\, arcsinx\, dx$

Вариант 8

Найти интегралы:

1) $\int (2-\frac{x}{5}+\frac{5}{x})\,dx$

2) $\int \frac{3+\sqrt[4]{x}}{x}\,dx$

3) $\int (10x^4-\frac{1}{2\sin^2 x}-2)\,dx$

4) $\int \frac{x^{\frac{-1}{3}}-x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

5) $\int x\,2^{x^2}\,dx$

6) $\int x\,arccosx\,dx$

Вариант 9

Найти интегралы:

1) $\int (2\,cosx-3x^2-3)\,dx$

2) $\int \frac{5-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$

3) $\int (\frac{1}{5\cos^2 x}-\frac{x}{2}+\frac{2}{x})\,dx$

4) $\int \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

5) $\int \frac{xdx}{¿¿}¿$

6) $\int x^2 e^x\,dx$

Вариант 10

Найти интегралы:

1) $\int (x^7-3\,sinx+2)\,dx$

2) $\int \frac{2-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

3) $\int (9x^8-3e^x+5)\,dx$

4) $\int \frac{7-x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

5) $\int \sqrt[5]{¿¿¿}$

6) $\int x^2\,sinx\,dx$

Вариант 11

Найти интегралы:

1) $\int (3-2e^{x}+x^{3})dx$

2) $\int \frac{\sqrt[5]{x}-4}{\sqrt{x}}dx$

3) $\int (5x^{3}-sinx+10)dx$

4) $\int \frac{x^{\frac{-1}{3}}+2}{\sqrt{x}}dx$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-4x}}$

6) $\int (2x-1)e^{x}dx$

Вариант 12

Найти интегралы:

1) $\int (\frac{1}{2\sqrt{1-x^{2}}}+x-4)dx$

2) $\int \frac{3-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$

3) $\int (2-\frac{1}{3\sin^{2}x}-x^{5})dx$

4) $\int \frac{3+x}{\sqrt[4]{x}}dx$

5) $\int e^{cosx}sinxdx$

6) $\int x\,arctgx\,dx$

Вариант 13

Найти интегралы:

1) $\int (5^{x}-3sinx+4)dx$

2) $\int \frac{x\sqrt{x}-x}{x^{2}}dx$

3) $\int (2-\frac{1}{3\sin^{2}x}-5^{x})dx$

4) $\int \frac{3+x}{\sqrt[4]{x}}dx$

5) $\int \frac{e^{x}dx}{3+e^{x}}$

6) $\int x^{2}arctgx\,dx$

Вариант 14

Найти интегралы:

1) $\int \frac{3-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$

2) $\int \frac{x^{2}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx$

4) $\int (\frac{x}{3}-\frac{3}{x}+5e^{x})dx$

5) $\int \left(\frac{xdx}{\sqrt{2x^{2}-5}}\right)$

3) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}+x-4\right)dx$

6) $\int x^2 arcsinx\, dx$

Вариант 15

Найти интегралы:

1) $\int \frac{2+x}{x\sqrt{x}}dx$

4) $\int \left(9x^2-3e^x+5\right)dx$

2) $\int \frac{x^3-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

5) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{5-2x^3}}$

3) $\int \left(6-\frac{x^3}{2}-3cosx\right)dx$

6) $\int x^2 arccosx\, dx$

Контрольные вопросы

1. Как называется действие, состоящее в нахождении первообразной?
2. В чем состоят основные свойства интеграла?
3. Какими методами были найдены Ваши интегралы?
4. Какие алгебраические преобразования и свойства интегралов Вы использовали?

Содержание отчета.

Отчет о проделанной работе должен включать:

- Тему и цель работы;
- Перечень оборудования;
- Краткие теоретические сведения;
- Практическую часть по варианту;
- Ответы на контрольные вопросы;
- Вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 12

Интегрирование рациональных и иррациональных функций.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научится интегрировать рациональные и иррациональные функции.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$,где P(x) и Q(x)-многочлен.

Рациональная дробь называется правильной ,если степень многочлена P(x) ниже степени многочлена Q(x); в противном случае дробь называется неправильной.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$, где m-целое число, большее единицы;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4}$-q<0,т.е квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней;

IV. $\frac{Ax+B}{(x¿¿2+px+q)^n¿}$, где n- целое число, большее единицы и квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Во всех случаях предполагается, что A,B,p,q,a- действительные числа.

Интегралы I и II типа вычитаются при помощи элементарной подстановки.

Пример 1.

$$\int \frac{2}{x-3}dx = \left| \begin{matrix} x-3=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = 2\int \frac{dt}{t} = 2\,lnt + c = \ln(x-3)^2 + c.$$

Пример 2.

$$\int \frac{3}{x-3}dx=\left|\begin{matrix} x+4=t \\ dx=dt \end{matrix}\right|=3\int \frac{dt}{t^3}=3\int t^3 dt=3\frac{t^2}{-2}+c=\frac{-3}{2t^2}+c=\frac{-3}{2(x+4)^2}+c.$$

Интеграл III типа вычисляется при помощи выделения полного квадрата в знаменателе дроби, а затем применения подстановки.

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25}=\int \frac{dx}{(x+3)^2+16}=\left|\begin{matrix} x+3=t \\ dx=dt \end{matrix}\right|=\int \frac{dt}{t^2+16}=\frac{1}{4}arctg\frac{t}{4}+c=\frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{4}+c.$$

Интеграл IV типа вычисляется по ресурснтной формуле:

$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n}$, пологая теперь $x+\frac{p}{2}=t$, dx=dt и обозначая $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, получим $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$.

Интегрировать рациональные дроби можно с помощью разложения на простейшие дроби. Для этого необходимо:

1) Если дана неправильная дробь, то выделить из неё целую часть , т.е представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, где M(x)-многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь;
2) Разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители (простые).
3) Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\text{¿}\ldots+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n}+\text{¿}\ldots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q}+\text{¿}\ldots;$$

4)Вычислить неопределенные коэффициенты, для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и рушить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

Пример 4.

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx.$$

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}=\frac{Ax^2-6Ax+8A+Bx^2-5Bx+4B+Cx^2-3Cx+2C}{(x-1)(x-2)(x-4)}.$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -6A-5B-3C=2 \\ 8A+4B+2C=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ B+3C=8 \\ -4B-6C=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ B+3C=8 \\ 6C=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=5 \\ B=-7 \\ A=3 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}-7\int\frac{dx}{x-2}+5\int\frac{dx}{x-4}=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+lnC=\ln\frac{C(}{}$$

.

Для интегрирования иррациональных функций применяются подстановки, позволяющие избавиться от радикалов(корней) или алгебраические преобразования функций:

Пример 5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{array}{c} 2x+1=t^6 \\ 2dx=6t^5dt \\ t=\sqrt[6]{2x+1} \end{array}\right|=\int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^5dt}{t^3(t-1)}=3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt=3\int (t+1)dt+3\int \frac{dt}{t-1}=3\frac{t}{2}$$

.

Пример 6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\left|\begin{array}{c} x+1=t \\ dx=dt \end{array}\right|=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)+C=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)+C.$$

Практическая часть

Вариант 1.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$

3) $\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)}dx$

Вариант 2.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$

3) $\int \frac{x+3}{2(x+1)(x-5)}dx$

Вариант 3.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$

2) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

3) $\int \frac{4x+3}{(x+3)(x-1)}dx$

Вариант 4.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{x+2}{x(x-3)}dx$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$

Вариант 5.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx$

2) $\int \sqrt{25-x^2}dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

Вариант 6.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1+1}}dx$

3) $\int \frac{dx}{(x-3)^2}$

Вариант 7.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x-8}$

2) $\int \frac{\sqrt[5]{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$

3) $\int \frac{xdx}{x^2-5x+6}$

Вариант 8.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$

2) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+20}}$

Вариант 9.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{x+1}{(x\text{¿¿}2+2x+5)^2}\text{¿}\mathrm{dx}$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

3) $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$

Вариант 10.

Найти интегралы:

$$1)\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$$

$$2)\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$$

$$3)\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$$

Контрольные вопросы

1. Какие методы интегрирования вы знаете?
2. Чему равна производная от под интегральной функции?
3. Что находят при помощи интегрирования?

Содержание отчёта

Отчет о проделанной работе должен включать:

- тему и цель работы;

- перечень оборудования;

- краткие теоретические сведения;

- практическую часть по варианту;

- ответы на контрольные вопросы;

- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 13

Интегрирование при помощи универсальной подстановки.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель работы: научится интегрировать простейшие тригонометрические функции и применять универсальную тригонометрическую подстановку.

Оборудование: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Интегралы вида $\int f(sinx, cosx)dx$, где f-рациональная функция приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью, так называемой универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2}=t$. В результате этой подстановки имеем:

$$sinx=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};cosx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ x=2arctgt;\ \ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{4sunx+3cosx+5}$.

Подинтегральная функция рационально зависит от sinx и cosx; Применим подстановку $tg\frac{x}{2}=t$, тогда $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$, $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int\frac{dx}{4sinx+3cosx+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4*2t}{1+t^2}+\frac{3*1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\begin{vmatrix}t+2=z\\dt=dz\end{vmatrix}=\int\frac{dz}{z^2}=\int z^{-2}dz=-z^{-1}$$

.

В некоторых случаях более простое решение получается, если применить подстановку cosx=t, sinx=t или tgx=t.

Пример 2.Найти интеграл $\int\frac{(s\,inx+\sin^3x)dx}{\cos2x}$.

Так как Подинтегральная функция нечетна относительно синуса, то получаем cosx=t. Отсюда $sinx^2=1-t^2$, $\cos2x=2\cos^2x-1=2t^2-1$, $dt=-sinxdx$.

Таким образом:

$$\int \frac{(s\,inx+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}=\int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1}=\int \frac{(t\text{¿¿}2-2)dt}{2t^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int \frac{2t^2-1}{2t^2-1}dt-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{\ }}$$

, т. к

$$\int \frac{dt}{2t^2-1}=\left|\begin{matrix}\sqrt{2}t=z\\ \sqrt{2}dt=dz\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C.$$ Следовательно

$$\int \frac{(s\,inx+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}=\frac{1}{2}cosx-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}cosx-1}{\sqrt{2}cosx+1}\right|+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sqrt{\sin^5 x}\,cosxdx$.

Применим подстановку sinx=t, cosxdx=dt, тогда

$$\int \sqrt{\sin^5 x}\,cosxdx=\int t^{\frac{5}{2}}dt=\frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^7 x}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{(1+tgx)^2}{1-\sin^2 x}dx$.

Применяем подстановку 1+tgx=t, тогда $\frac{1}{\cos^2}dx=dt$ и $1-\sin^2 x=\cos^2 x$,следовательно $\int \frac{(1+tgx)^2}{1-\sin^2 x}dx=\int t^2 dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(1+tgx)^3}{3}+C.$

Практическая часть

Вариант 1.

Найти интегралы.

1) $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$.

2) $\int \frac{dx}{sinx}$.

3) $\int \frac{dx}{(1-tgx)\cos^2 x}$.

Вариант 2.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

2) $\int \frac{dx}{cosx}$.

3) $\int \frac{dx}{\left(1-ctgx\right)\sin^2 x}$.

Вариант 3.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{sinxdx}{\left(1-cosx\right)^2}$.

2) $\int \frac{dx}{5-3\,cosx}$.

3) $\int \frac{\left(tgx+2\right)dx}{\cos^2}$.

Вариант 4.

Найти интегралы:

1) $\int \sin^3 xdx$.

2) $\int \frac{dx}{3+5\,sinx+3\,cosx}$.

3) $\int \frac{\left(3+ctgx\right)dx}{\sin^2 x}$.

Вариант 5.

Найти интегралы:

1) $\int \cos^3 xdx$.

2) $\int \frac{dx}{1-sinx}$.

3) $\int ctg^2 x\, cosec^2 x\, dx$.

Вариант 6.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^4 xdx}$.

2) $\int \frac{dx}{sinx+cosx}$.

3) $\int \frac{dx}{tgxcos2x}$.

Вариант 7.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{1+tgx}$.

2) $\int \frac{dx}{5+4sinx}$.

3) $\int \frac{ctgx}{lnsinx}dx$.

Вариант 8.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{sinxdx}{4-cosx}$.

2) $\int \frac{dx}{5+4sindx}$.

3) $\int \frac{\cos 2xdx}{\cos^2 x}$.

Вариант 9.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{1+sinx}$.

2) $\int \sin^5 xdx$.

3) $\int \frac{2\,tgxdx}{\cos^2 x}$.

Вариант 10.

Найти интегралы:

1) $\int \frac{1+cosx}{1+cosx}dx$.

2) $\int \left(tg^2 x+tg^4 x\right)dx$.

3) $\int \frac{\sin^3 x}{cosx}dx$.

Контрольные вопросы

1.Перечислете свойства неопределенного интеграла.
2.Что называется первообразной?
3.В чем состоит метод интегрирования «по частям».

Содержание отчёта

Отчет о проделанной работе должен включать:
- тему и цель работы;
- перечень оборудования;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть по варианту;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия №14

Вычисление определенного интеграла.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научится вычислять определенные интегралы различными методами.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел, к которому стремиться интегральная сумма при стремлении к нулю длинны наибольшего частичного интеграла $\triangle x$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_{1\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Число a называется нижним пределом интегрирования, число b -

верхним пределом, отрезок $[a,b]$ - отрезком интегрирования. Всякая функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ интегрируема на нем.

Основные свойства определенного интеграла.

1. Определенный интеграл с одинаковым пределам равен нулю

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

2.При перестановке пределов интегрированный знак интеграла меняется на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3.Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_e^b f(x)dx$; где $a \le e \le b$

4.Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int_a^b c f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

5.Интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

Для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную, а затем воспользоваться формулой Ньютона- Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\text{¿}_a^b = F(b) - F(a)$$

Вычисления определенного интеграла методом подстановки состоит в следующем:

1)часть подынтегральной функции заменить новой переменной;

2)найти новые пределы интегрирования;

3)найти дифференциал от обеих частей замены;

4)все подынтегральное выражения выразить через новую переменную (должен получиться табличный интеграл)4

5)вычислить полученный интеграл

Вычисление определенного интеграла методом <<по частям>> производится по формуле:

$$f(x)dx\int_a^b udv = uv\text{¿}_a^b - \int_a^b vdu$$

Практическая часть

Вариант 1.

Вычислите определенные интегралы

1. $\int_0^2 \text{¿¿}$; 2. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4+16}\cdot x^3 dx$;

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin xdx$; 4. $\int_2^4 \frac{xdx}{\text{¿¿¿}}\text{¿}$;

5. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{128xdx}{\text{¿¿¿}}\text{¿}$; 6. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

Вариант 2.

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_0^4 \left(2\sqrt{x}-x^2\right)dx$; 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\text{¿¿}}\text{¿}$;

$3.\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}dx;$ $4.\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}};$

$5.\int_2^4 \frac{15xdx}{\text{¿¿}}\text{¿};$ $6.\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Вариант 3.

Вычислите определенные интегралы:

$1.\int_{-1}^1 \left(5-x-3x^2\right)dx;$ $2.\int_0^2 \frac{x^4dx}{\sqrt{x^x+4}};$

$3.\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos xdx;$ $4.\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{25-3x^2dx};$

$5.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\text{¿¿}}\text{¿};$ $6.\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$

Вариант 4.

Вычислите определенные интегралы:

$1.\int_1^8 \left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx;$ $2.\int_0^1 x^2e^{x^3+1}dx;$

$3.\int_1^2 \frac{x-1}{x^3}dx;$ $4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\text{¿¿¿}}}\text{¿};$

$5.\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin xdx;$ $6.\int_{\frac{1}{2}}^2 \text{¿¿};$

Вариант 5.

Вычислите определенные интегралы:

$1.\int_{-1}^1 \left(x^2-2\right)dx;$ $2.\int_1^2 \frac{xdx}{\text{¿¿¿}}\text{¿};$

$3.\int_0^1 \left(e^x+x\right)dx;$ $4.\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{9+2x^3}};$

$5.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2xdx;$ $6.\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin xdx;$

Вариант 6.

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{1}^{4} \left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx;$ 2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx;$

3. $\int_{-2}^{2}$ ¿¿; 4. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{9-5x^2}};$

5. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{3\,dx}{2\cos^2 3x};$ 6. $\int_{0}^{1} x e^{x} dx;$

Вариант 7

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{1}^{8} \frac{x-1}{\sqrt[x]{3}} dx;$ 2. $\int_{0}^{1}$ ¿¿;

3. $\int_{-1}^{1}$ ¿¿; 4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{¿¿}$ ¿;

5. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{6-5x+x^2};$ 6. $\int_{0}^{1} x e^{-x} dx;$

Вариант 8

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{2}^{3} \frac{1+x^5}{x^4} dx;$ 2. $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx;$

3. $\int_{-1}^{0} \left(x^3+2x\right) dx;$ 4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ¿¿;

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)};$ 6. $\int_{0}^{1} x\, arctgx\, dx;$

Вариант 9

Вычислите определенные интегралы:

$1.\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x};$ $\qquad 2.\ \int_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,dx;$

$3.\ \int_{1}^{16} \left(\sqrt{x}-2\right) dx;$ $\qquad 4.\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2\sin x+1};$

$5.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) dx;$ $\qquad 6.\ \int_{0}^{1} x\, arctgx\, dx;$

Вариант 10

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int\limits_1^2 \frac{1+x^7}{x^6}dx;$ 2. $\int\limits_0^1 (5-2x^3)x^2dx;$

3. $\int\limits_1^8 \text{¿¿};$ 4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4+5\sin x}\cos x\,dx;$

5. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}dx;$ 6. $\int\limits_2^3 x^2\ln|x|dx;$

Вариант 11

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin^2 x};$ 2. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{7x^3+1}};$

3. $\int\limits_1^4 \left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx;$ 4. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[4]{(1+15x^2)}};$

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x}\sin x\,dx;$ 6. $\int\limits_2^3 x^2\ln|x|dx;$

Вариант 12

Вычислите определенный интеграл:

1. $\int\limits_1^2 \frac{1-x^6}{x^5}dx;$ 2. $\int\limits_{-1}^2 \frac{xdx}{\text{¿¿}}\text{¿};$

3. $\int\limits_0^4 1-\sqrt{x}\,\text{¿}^2 dx;$ 4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\text{¿¿}}\text{¿};$

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{3-\cos x};$ 6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx;$

Вариант 13

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \text{¿¿};$ 2. $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{25-4x^2}};$

3. $\int\limits_0^4 \text{¿¿};$ 4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{\text{¿¿}} \text{¿};$

5. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}};$ 6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx;$

Вариант 14

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\text{¿¿}} \text{¿};$ 2. $\int\limits_1^2 \frac{1-x^6}{x^5} dx;$

3. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[4]{(1+15x^2)}};$ 4. $\int\limits_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right) dx;$

5. $\int\limits_{-1}^2 \text{¿¿};$ 6. $\int\limits_1^e \ln^2|x|\, dx;$

Вариант 15

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt[3]{7x^3+1}};$ 2. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3\sin^2 x};$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4+5\sin x} \cos x\, dx;$ 4. $\int\limits_1^8 \left(1-4\sqrt[3]{x}\right) dx;$

5. $\int\limits_0^1 3e^{x^3} x^2 dx;$ 6. $\int\limits_1^e \ln^2|x|\, dx;$

Контрольные вопросы.

1.Что называется определенным интегралом?

2.В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

3.Какие свойства определенного интеграла Вы применяли при решении примеров?

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 15

Приложение определенного интеграла.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научиться применять понятие определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объёмов тел длин дуги.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Понятие определённого интеграла широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин. Из геометрического смысла определённого интеграла, следует, что с его помощью можно вычислить площадь криволинейной трапеции, а значит и площадь любой плоской фигуры. Для этого используют формулы:

$S=\int_a^b f(x)dx$ или $S=-\int_a^b f(x)dx$, комбинируя их в зависимости от того, как данная плоская фигура разбивается на криволинейные трапеции можно вычислить площади сложных плоских фигур. Применяя формулу $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$, можно вычислить объём тела, которое получается при вращении криволинейной трапеции вокруг оси Ох, а по формуле $V=\pi\int_a^b f^2(y)dy$ – вокруг оси Оу. Комбинируя формулы находим объёмы сложных тел.

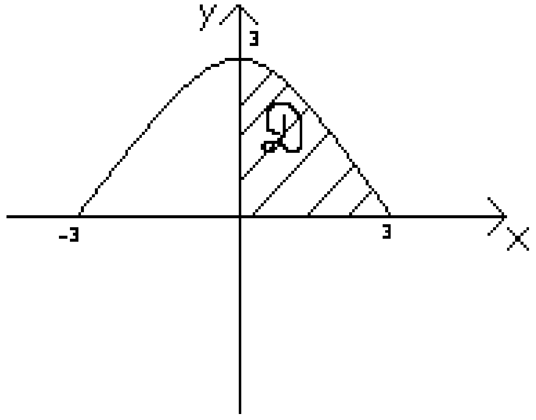
Если дана дуга плоской кривой, то при помощи определённого интеграла можно найти её длину по формуле:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

Примеры решения задач

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{-1}{3}x^2+3$, y = 0, x = 0 b x = 3

Построим графики данных функций и выделим искомую площадь



y = 0, $\frac{-1}{3}x^2+3=0$, $x^2-9=0$ $x_1=3$ $x_2=-3$

Фигура *Д* является криволинейной трапецией, поэтому $S=\int_0^3\left(\frac{-1}{3}x^2+3\right)dx=\left(\frac{-1}{3}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\frac{-27}{9}+9-0=6(\text{ед}^2)$

2.Вычислить длину дуги кривой $y=2x\sqrt{x}$между точками x_1 = 2 x_2 = 3

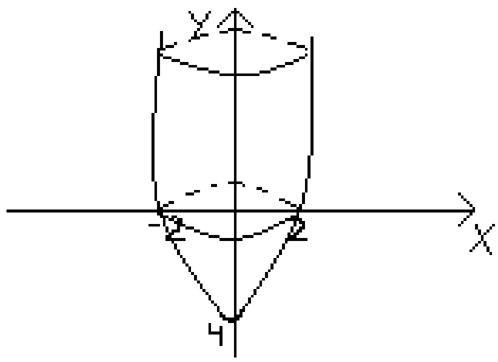
Найдём y'.

$y'=2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=3x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}$

Подставим y' в формулу $L=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+9x}\,dx=\left|\begin{matrix}1+9x=t\\9dx=dt\\t_н=17\\t_в=28\end{matrix}\right|=\frac{1}{9}\int_{17}^{28}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{9}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{17}^{28}=\frac{2}{27}*75{,}9=\frac{151{,}8}{27}=5{,}6$$

3.Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной параболой y = x^2 – 4, прямой y = 4 и осями координат.



$V=\pi\int_0^4(y+4)\,dy=\pi\left(y^2+4y\right)\Big|_0^4=¿\pi(16+16)=32\pi\left(ед^3\right)$

Практическая часть

Вариант 1

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1)x-y+2=0, y=0, x=-1, и x=2;

2)2x-3y+6=0,   y=0   и   x=3

2.Найти длину параболы $y=x^2$ между точками O(0;0) и A$\left(\sqrt{\frac{3}{2}};\frac{3}{4}\right)$

3.Сделайте чертеж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными линиями: xy=1, x=2, x=3, y=0

Вариант 2

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:
1)x-y+3=0,   x+y-1=0   и   y=0;
2)x-2y+4=0,   x+2y-8=0,   y=0,   x=-1   и   x=6.
2. Найти длину параболы $y=4-x^2$ между точками её пересечения с осью Ox.
3. Сделайте чертеж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными линиями: $y=x^2$,   y=0,   x=0,   x=2.

Вариант 3

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:
1)$y=x^2$,   y=0,   x=0   и   x=0;
2)$y=3x^2$,   y=0, x=-3   и   x=2.

2.Найти длину параболы $y^2=x$ между точками O(0;0) и A$\left(\frac{3}{4};\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

3. Сделайте чертеж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными линиями: y^2-3x=0,   x-3=0.

Вариант 4

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:
1) $y=x^2+1$,   y=0,   x=-1   и   x=2;
2)$y=0{,}5x^2+2$,   y=0,   x=1   и   x=3.

2.Найти длину параболы $y^2=x^3$ между точками O(0;0) и A$\left(\frac{4}{3};8\sqrt{\frac{3}{9}}\right)$.

3. Сделайте чертеж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными линиями: $y=1/3x^2$,   y=0,   x-3=0,   x=0.

Вариант 5

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:
1)$y^2=x$,   y≥0,   x=0,   x=3;
2)$y=-x^2+6x-5$,   y=0,   x=2,   x=3.
2. Найти длину параболы $9y^2=4x^3$ между точками O(0;0) и A$(3;2\sqrt{3})$.
3. Сделайте чертеж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной данными линиями: $y=x^2+1$,   y=2,   y=5.

Вариант 6

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:
1)$y=-x^2-2x+8$,   y=0;
2)$y=-(2/9)x^2+(4/3)x$,   y=0.

2. Найти длину цепной линии $y=(e^x+e^{-x})/2$ между точками A(0;1) и B$\left(\frac{1}{2}; e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{-1}{2}} ¿¿ 2\right)$.

3. Сделайте чертеж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной данными линиями: $y=3 - 1/3x^2$, $y=2$, $y=0$.

Вариант 7

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1)$y=1/x$, $y=0$, $x=1$, $x=3$;

2)$y=2/x$, $y=0$, $x=2$, $x=4$.

2. Найти длину цепной линии $y=a(e^{x/a}+e^{-x/a})/2$ между точками A(0;a) и B$\left(a; a\left(e^2+1\right)/\left(2e\right)\right)$.

3. Сделайте чертеж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной данными линиями: $x^2-2y=0$, $y-2=0$.

Вариант 8

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1)$y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/2$;

2)$y=\operatorname{tg} x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/3$.

2. Найти длину окружности $x^2+y^2=r^2$.

3. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной осью Ox и полуволной синусоиды

У = $\sin x (0 \le x \le \pi)$

Вариант 9

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1)$y=-3x^2$, $y=0$ и $x=2$;

2)$y=2x$, $y=0$ и $x=-3$.

2. Найти длину параболы $y=x^2/2$ между точками O(0;0) и A$\left(\sqrt{3}; 3/2\right)$.

3. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y^2=2x$, прямой $x=3$ и осью Ox.

Вариант 10

1.Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1)$y=-3x^2$, $y=0$ и $x=2$;

2)$y=-x^2-1$, $y=0$, $x=-2$ и $x=1$;

3)$y=x^2-4$ и $y=0$.

2. Найти длину параболы $y^2=4x$ между точками O(0;0) и A$\left(5/4; \sqrt{5}\right)$.

3. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=2$.

Контрольные вопросы

1. Что называется определённым интегралом?
2. В чём состоит геометрический смысл определённого интеграла?

3. Чему равен дифференциал дуги плоской кривой?
4. В каких ещё задачах физики и техники применяется определённый интеграл?

Содержание отчета

Отчет о проделанной работе должен включать:
- тему и цель работы;
- перечень оборудования;
- краткие теоретические сведения;
- практическую часть **по варианту;**
- ответы на контрольные **вопросы;**
- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 16

Вычисление частных производных и дифференциалов функции некоторых переменных.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научиться дифференцировать функции нескольких переменных, закрепить понятие полного дифференциала функции.

Оборудование: учебная литература, тетрадь, калькулятор, линейка, ручка.

Краткая теория

Частной производной от функции z=f(x,y) по независимой переменной x называется производная $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}$, вычисленная при постоянном y.

Частной производной по y называется производная $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}$, вычисленная при постоянном x.

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Полным дифференциалом функции z=f(x,y) называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx, Δy, т.е. dz=AΔx+BΔy.

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. dx=Δx и dy=Δy.

Полный дифференциал функции z=f(x,y) вычисляется по формуле: z=(∂z/∂x)dx+(∂z/∂y)dy. Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов u=f(x;y;z) вычисляется по формуле: ∂u=(∂u/∂x)dx+(∂u/∂y)dy+(∂u/∂z)dz.

Примеры решения задач:

Найти частные производные функций:

1) $U=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}}\cdot z\left(\frac{-1}{2}\right)(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}\cdot 2x=\frac{-z\cdot x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3-z^2(x^2+y^2)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}}\cdot z¿;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}.$$

2) $z=\ln\sqrt{\frac{y}{x}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot y(-1)\,x^{-2}=\frac{x}{2y\cdot y\cdot x^2}=\frac{1}{2xy^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{2yx}=\frac{1}{2y};$$

Найти dz:

1) $z=e^{3x^2+2y^2-xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{3x^2+2y^2-xy}\cdot(6x-y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{3x^2+2y^2-xy}(4y-x);$$

$$dz=e^{3x^2+2y^2-xy}\cdot(6x-y)dx+e^{3x^2+2y^2-xy}(4y-x)dy;$$

2) $z=\sqrt{5e^x+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{5e^x+y^2}}\cdot 5e^x;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{5e^x+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{5e^x+y^2}};$$

$$dz=\frac{5e^x}{2\sqrt{5e^x+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{5e^x+y^2}}dy.$$

Практическая часть

Вариант №1.

Найти частные производные функций:

1) $U=\sqrt{x^2+y^2-1}$;

2) $U=x^2+2y^2-3xy-4x+2y+5$;

Найти dz:

1) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$;

2) $z=e^{x^2+y^2}$.

Вариант №2.

Найти частные производные функций:

1) $U=x^2\sin^4 y$;

2) $z=\ln tg\dfrac{y}{x}$;

Найти dz:

1) $z=y\ln x$;

2) $z=xy^2U^3$.

Вариант №3.

Найти частные производные функций:

1) $U=\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{x}{y}$;

2) $z=arctg\dfrac{x+y}{x-y}$;

Найти dz:

1) $z=4x^3+3x^2+3xy^2-y^3$;

2) $z=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}$.

Вариант №4.

Найти частные производные функций:

1) $U=\arcsin\left(x+y\right)$;

2) $z=e^{xy\left(x^2+y^2\right)}$;

Найти dz:

1) $z=\sin(x^2+y^2)$;

2) $z=xy+\sin(x+y)$.

Вариант №5.

Найти частные производные функций:

1) $U=\ln(-x+y)$;

2) $U=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{z^2}$;

Найти dz:

1) $z=x^y+y^x$;

2) $z=\ln tg(x+y)$.

Вариант №6.

Найти частные производные функций:

1) $U=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$;

2) $U=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{-z}{y}}$;

Найти dz:

1) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}\text{¿})\text{¿}$;

2) $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$.

Вариант №7.

Найти частные производные функций:

1) $U=\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2-z^2)}$;

2) $z=arctg\dfrac{y}{1+x^2}$;

Найти dz:

1) $z=e^x\text{¿}$;

2) $z=x^2\ln(x+y)$.

Вариант №8.

Найти частные производные функций:

1) $U=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

2) $z=e^{(x^3+y^2)^2}$;

Найти dz:

1) $z=e^{x+y}$¿ ;

2) $z=0{,}5\ln(x^2+y^2$¿$)$¿ .

Вариант №9.

Найти частные производные функций:

1) $U=\sqrt{\cos(x^2+y^2)}$;

2) $U=(x-y)(x-z)(y-z)$;

Найти dz:

1) $z=arctg\,2$¿¿ ;

2) $z=\frac{x^4-8xy^3}{x-2y}$.

Вариант №10.

Найти частные производные функций:

1) $U=y+\sqrt{x}$;

2) $U=e^{xyz}$;

Найти dz:

1) $z=\sin$¿¿;

2) $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется функцией двух переменных?
2. Что является областью определения функции двух переменных?
3. В чем состоит геометрический смысл частной производной?

4. Что называется частным приращением функции f(x,y) в точке M(x;y)?
5. Какая функция называется дифференцируемой в точке?

Содержание отчета:

Отчет о проделанной работе должен включать:

- Тему и цель работы;
- Перечень оборудования;
- Краткие теоретические сведения;
- Практическую часть по варианту;
- Ответы на контрольные вопросы;
- Вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ «НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ» (ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 17

Вычисление экстремумов функции двух действительных переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научится исследовать функцию нескольких переменных на экстремум и находить наибольшее и наименьшее значения функции.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

1. Необходимые условия существования экстремума.

Понятие максимума и минимума можно распространить и на функцию двух действительных переменных.

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум (минимум) , если существует такая окрестность и отличных от M_0 выполняется неравенство $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ $(f(x_0; y_0) < f(x; y))$

или $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) < 0$ $(\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) > 0)$

Теорема (необходимые условия существования экстремума).

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум и в точке этой точке существуют частные производные z'_x и z'_y, то эти производные равны нулю, $z'_x(x_0; y_0) = 0$ и $z'_y(x_0; y_0) = 0$ (1)

2. Достаточные условия существования экстремума.

Теорема (достаточные условия существования экстремума).

Пусть функция $f(x; y)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядков некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ удовлетворяет условиям (1).

Обозначим $A = f''_{xx}(M_0),\ B = f''_{xy}(M_0),\ C = f''_{yy}(M_0),\ \Delta = AC - B^2$. Тогда в точке M_0 функция $f(x; y)$:

1) имеет минимум, если $\Delta > 0$ и $A > 0$;

2) имеет максимум, если $\Delta > 0$ и $A < 0$;

3) не имеет экстремума, если $\Delta < 0$

Пример 1

Исследовать частные производные данной функции первого порядка;

$Z'_x = 3x^2 - 3y, \quad Z'_y = 3y^2 - 3x$

Приравниваем их к нулю и решим полученную систему:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$ и так $M_0(0;0), M_1(1;1)$

Найдём частные производные второго порядка $Z''_{x^2} = 6x, Z''_{y^2} = 6y,$

$Z''_{xy} = -3$.

Найдём значения вторых производных в точках M_0 и M_1:

$A = Z''_{x^2}(M_0) = 0, \quad B = Z''_{xy} = -3, \quad C = Z''_{y^2} = 0,$

$A = Z''_{x^2}(M_1) = 6, \quad B = Z''_{xy} = -3, \quad C = Z''_{y^2} = 6.$

В точке M_0 имеем $\Delta = 0 - (-3)^2 = -9 < 0$, следовательно экстремум в этой точке есть.

В точке M_1 $\Delta = 36 - 9 = 27 > 0$, при чём $A = 6 > 0$, следовательно экстремум есть и причём минимум $Z(1;1) = 1 + 1 - 3 = -1$.

Минимум функции равен -1.

Пример 2

Исследовать на экстремум функцию $Z = x^3 - y^3$

Решение.

Найдём частные производные первого порядка:

$Z'_x = 3x^2, Z'_y = 3y^2$.

Проверим выполнение необходимого условия:

$$\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0;0)$$

В точке M_0 экстремум возможен.

Проверим выполнение достаточного условия

$A = Z''_{xx} = 6x, Z''_{xx}(0;0), B = Z''_{xy} = 0, C = Z''_{yy} = 6y, Z''_{yy}(0;0)$,

значит Д=0. В условиях данной задачи экстремума нет, т. к в любой окрестности точки M_0 функция принимает значение разных знаков, а в самой точку Z=0.

Пример3

Исследовать на экстремум функцию $Z = x^4 - y^4$

Решение.

$Z'_x = 4x^3, Z'_y = 4y^3$.

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad M_1(0;0)$$

$Z''_{xx} = 12x^2$, $\quad Z''_{xy} = 0$, $\quad Z''_{yy} = 12y^2$

A=0Ю B=0, C=0, Д=0.

В условиях данной задачи экстремум у функций есть, причём минимум, так как в любой окрестности точки M_0 функции положительна, а в самой точке M_0(0;0) Z=0,

При исследование функции нескольких переменных на экстремум следует иметь в виду, что точки экстремума могут находиться как среди точек, в которых частные производные равны нулю, так и среди точек, в которых частные производные не существуют, например $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет минимум в точке (0;0), хотя частные производные этой функции не существуют.

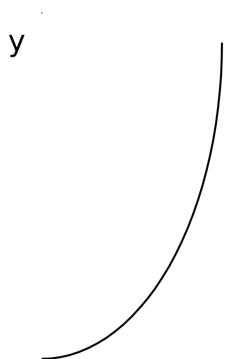
При отыскание наибольшего и наименьшего значения функции в некоторой замкнутой области следует найти все внутренние точки области, в которых функция может иметь экстремум. Затем надо исследовать функцию на границе области и найти там точки, где функция может принимать наибольшие (наименьшие) значение. При этом часто приходится разбивать границу области на части, заданные различными уравнениями. Вычислив собой: наибольшее (наименьшее) из этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей замкнутой области.

Задача.

Найти наибольшие и наименьшие значение функции $z = 3x^2 - 6xy - 3y^2$ в замкнутой области, ограниченной осью ОУ, прямой y=2 и параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$.

Решение.

Изобразим в системе координат заданную замкнутую область.



x

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения, могут находиться как внутри области, так и на её границе. Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то в этой точке частные производные

$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y, \; z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y$ равны нулю.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

Найдём точки, в которых возможен экстремум функции, т.е критические точки первого рода или стационарные точки.

Сложим почленно уравнение системы, получим

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ y = x \end{cases}$$ или $$\begin{cases} 6x(x - 1) = 0 \\ y = x \end{cases}$$ следовательно $$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

и $$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Получили две точки $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$. Первая из этих точек принадлежит границе области. Следовательно, если функция Z принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то это может быть только в точке M(1;1). Перейдём к исследованию функции на границе области.

На отрезке OA имеем x=0 и поэтому на этом отрезке $Z = 3y^2 \quad (0 \leq y \leq 2)$ есть возрастающая функция от одной переменной y; наибольшее и наименьшее значение она примет на концах отрезка OA, в точках O(0;0) и A(0;0). На отрезке AB имеем y=2 и поэтому на этом отрезке функции

$Z = 2x^3 - 6x \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 2x^3 - 12x + 12 \qquad (0 \leq x \leq 2)$ представляет собой функцию одной переменной x, её наибольшее и наименьшее значение находится среди ее значений в критических точках и на концах отрезка.

Находим производную: $Z' = 6x^2 - 12$. Решаем уравнение $Z' = 0$ или $6x^2 - 12$=0 и находим $x = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $0 \leq x \leq 2$ имеется лишь одна критическая точка $x = \sqrt{2}$; соответствующей точкой отрезка AB является точка Q($\sqrt{2}$;2) итак, из всех значений функции Z на отрезке AB наибольшее и наименьшее находится среди ее значений в точках A, Q и B. На дуге OB параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем

$$Z = 2x^3 - 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \qquad (0 \leq x \leq 2)$$

Решаем уравнение $Z' = 3x^3 - 3x^2 = 0$ или $x^2(x - 1) = 0$ и находим его корни: x=0 и x=1. Таким образом из всех значений функции Z на отрезке AB наибольшее и наименьшее находится среди ее значений в точках O, P и B. Следовательно. наибольшее и наименьшее значение функции

$Z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в данной замкнутой области находится среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т.е среди значений:

Z(O)=Z(0;0)=0; Z(A)=Z(0;2)=12; Z(Q)=Z($\sqrt{2}$;2)=12-8$\sqrt{2}$

Z(B)=Z(2;2)=4;   Z(P)=Z(1; $\frac{1}{2}$)=- $\frac{1}{4}$;   Z(M)=Z(1;1)= -1

Наибольшее и наименьшее из них равны 12 и -1. Они и являются наибольшим и наименьшим значениями данной функции в данной замкнутой области: $z_{наиб.}$ =12, $z_{наим.}$ = -1.

Практическая часть

Вариант 1.

1) Найдите экстремумы функции

$z = xy^2(1 - x - y)$

2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$(x - 2)^2 + y^2 \le 9$

Вариант 2.

1) Найдите экстремумы функции

$z = x^3 + y^3 - 3xy$

2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми

$x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y - 12$.

Вариант 3.

1) Найдите экстремум функции

$z = 4 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$

2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $z = xy - x - y$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 3$.

Вариант 4.

1) Найдите экстремумы функции

$z = (x^2 + y^2)(e^{-(x^2+y^2)} - 1)$

2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $z = xy$ в круге

$x^2 + y^2 \le 1$

Вариант 5.

1) Найдите экстремумы функции

$z = \sqrt{(2 - x)([illegible] + y)}$

2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$z = x^2 + 2y^2 - x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми

$x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$

Вариант 6.

1) Найдите экстремум функции

$z = xy(1 - x - y)$

2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$z = 1 + x [illegible] y^2$ в круге $([illegible] - [illegible])^2 + ([illegible] - [illegible])^2 \le [illegible]$

Вариант 7.

1) Найдите экстремумы функции

$z = x^3 + y^3 - 15xy$

2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$z = \sin x + \sin y + \sin(x - y)$ в области

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Вариант 8.

1) Найдите экстремумы функции

$z = 1 + (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$

2) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$z = \sin x - \sin y + \cos(x + y)$ в области $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{3\pi}{2}$

Вариант 9.

1) Найдите экстремумы функции

$z = \sqrt{3x^2 + y^2}$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$z = 3x - y - xy$ в квадрате $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 5$.

Вариант 10.

1) Найдите экстремумы функции

$z = 3x^2 - y^2 - xy$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$z = x^3 + y^3 - xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$.

Вариант 11.

1) Найдите экстремумы функции

$z = x^2 y + xy^3$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$z = 1 - x^2$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $4 \le y \le 6$

Вариант 12.

1) Найдите экстремумы функции

$z = 4x^2 + xy$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = xy$ в замкнутой области треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(3;0)$ и $C(0;4)$.

Вариант 13.

1) Найдите экстремумы функции

$z = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 1 - x^2$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $4 \le y \le 6$.

Вариант 14.

1) Найдите экстремумы функции

$z = \frac{x+y}{x-y}$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в замкнутой области, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{3}$ и прямой $y = 3$.

Вариант 15.

1) Найдите экстремумы функции

$z = x^2y + xy^2$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - 2y^2 - 4$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Контрольные вопросы

1. Что называется частной производной второго порядка?
2. Какие точки называются стационарными?
3. Какой экстремум называется условным?
4. Напишите формулу дифференциала функции Z=f(x,y) второго порядка.

Содержание отчёта

Отчёт о проделанной работе должен включать:

-тему и цель работы;
-перечень оборудования;
-краткие теоретические сведения;
-практическую часть по варианту;
-ответы на контрольные вопросы;
-вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 18

Вычисление двойных интегралов.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики

(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научиться вычислять двойные интегралы.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Пусть функция f(x;y) определенна в ограниченной замкнутой области Д плоскости ХОУ. Разобьём область D произвольным образом на n элементарных областей, имеющих площади $\Delta\delta$, $\Delta\delta_2$, …, $\Delta\delta_n$ и диаметры d_1, $d_2,\ldots,d_n$ (диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области произвольную точку $P_k(x_k, y_k)$ и умножим значение функции в точке P_k на площадь этой области. Предел суммы таких произведений и называется двойным интегралом, при условии, что этот предел не зависит от способа разбиения D и выбора точек P_k.

$$J=\iint_D f(x;y)\,d\delta=\lim_{\max d_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k)\Delta d_k.$$

Основные свойства двойного интеграла.

1. $\iint_D [f_1(x;y)\pm f_2(x;y)]\,d\delta=\iint_D f_1(x;y)d\delta\pm\iint_D f_2(x;y)\Delta\delta_k$
2. $\iint_D cf(x;y)\,d\delta=c\iint_D f(x;y)d\delta$, где с – постоянная.
3. *Если* D= D1 + D2, то

   $\iint_D f(x;y)d\delta=\iint_{D_1} f(x;y)d\delta+\iint_{D_2} f(x;y)d\delta.$
4. Оценка двойного интеграла.

   Если m≤f(x;y)≤M, то m S $\le\iint_D f(x;y)d\delta\le$MS, где

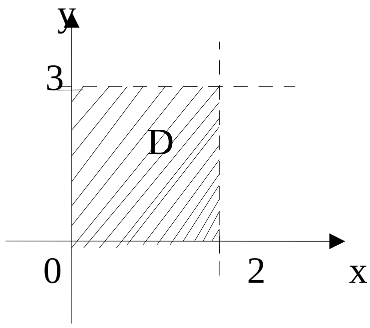
   S - площадь области D, а m и M соответственно наименьшее и наибольшее значение функции f(x;y) в области D.

Примеры

Вычислить двойной интеграл от функции: z= xy

1. $\iint\limits_D xydxdy$

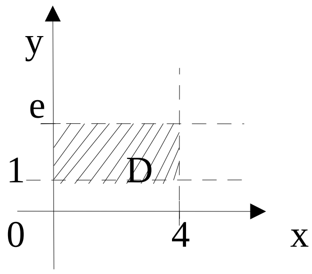
D: x=0; x=2; y=0; y=3;



$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^2 dx\int_0^3 xydy=\int_0^2 dx\cdot x\frac{y^2}{2}\Big|_0^3=\int_0^2 xdx\left(\frac{9}{2}¿\frac{-0}{2}\right)=\frac{9}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=9¿$$

2. $\iint\limits_D xlnydxdy$

D: x=0; x=4; y=1; y=e.

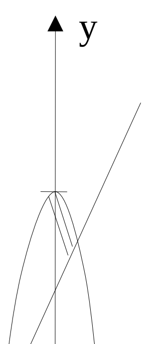


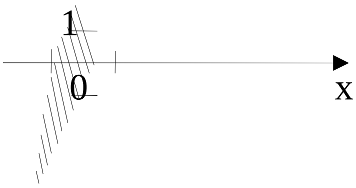
$$\iint\limits_D xlnydxdy=\int_1^e dy\int_0^4 xlnydx=\int_1^e dy\cdot lny\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8\int_1^e dylny=\left|\begin{matrix} lny=u & dy=dv \\ \frac{1}{ydy}=du & y=v \end{matrix}\right|=¿$$

$$8\left(ylny\Big|_1^e-\int_1^e y\frac{1}{y}dy\right)=8\left(e-y\Big|_1^e\right)=8(e-e+1)=8$$

3. $\iint\limits_D (¿x-y)dxdy\ ;¿$

D: y=2-x^2; y=2x-1.





$$\begin{cases} y=2-x^2 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

2-x^2=2x-1

x^2+2x-3=0

$x_1=1 \quad x_2=-3$

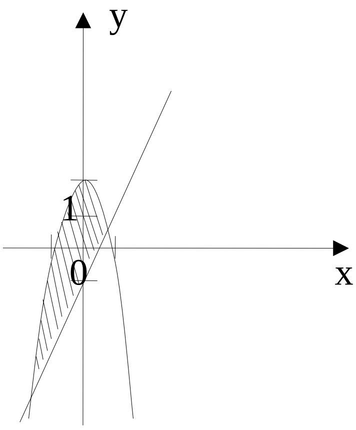
$$\iint\limits_D (\text{¿} x-y)\,dxdy=\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy=\int_{-3}^{1} dx\,\text{¿¿¿¿}=$$

$$\text{¿}\int_{-3}^{1} \left(2x-x^3\text{¿}\frac{-(2-x^2)^2}{2}-2x^2+x+\frac{(2x-1)^2}{2}\right)dx=\int_{-3}^{1} \left(2x-x^3\text{¿}-2+2x^2-\frac{x^4}{2}-2x^2+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_{-3}^{1} (x-$$

$$+\frac{54}{3}-\frac{243}{10}=-10+20+\frac{56}{3}-\frac{244}{10}=\frac{300+560-732}{30}=\frac{128}{10}=\frac{64}{15}=4\frac{4}{15}.$$

4. Поменять пределы интегрирования в предыдущей задаче.

$$\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,;$$



$$\begin{cases} y=2-x^2 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

$x_1=-3\,;x_2=1\,;$

$y_1=-7\,;y_2=1$

$$\int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} f(x,y)\,dy := \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{\frac{y+1}{2}} f(x+y)\,dx + \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x+y)\,dx .$$

Практическая часть

Вариант №1.

1. $\int\limits_{4}^{6} dx \int\limits_{\sqrt{x-2}}^{2} (y+1)\,dy .$
2. Вычислить $\iint\limits_{D}^{\square} e^{x+\sin y} \cos y dxdy$, если область D – прямоугольник $0 \le x \ge \pi , 0 \le y \ge \frac{\pi}{2}$.

Вариант №2.

1. $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x}} (y-1)\,dy .$
2. *Вычислить* $\iint\limits_{D}^{\square} (x^2 + y^2 ¿) dxdy$, *если область Д ограничена линиями* $y = x , x = 0 , y = 1 , y = 2. ¿$

Вариант №3.

1. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} 2\,y dy .$
2. *Вычислить* $\iint\limits_{D}^{\square} (3\,x^2 ¿ - 2\,xy + y) dxdy$, *если область Д ограничена линиями* $x = 0 , x = y^3 , y = 2. ¿$

Вариант №4.

1. $\int\limits_{\frac{9}{16}}^{\frac{3}{4}} dy \int\limits_{y}^{\frac{3}{4}} (x-1)\,dx .$
2. *Вычислить* $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 x dx \int\limits_{0}^{8} y dy .$

Вариант №5.

1. $\int\limits_{0}^{\frac{9}{16}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} (x^2 ¿¿ - 1)\,dx . ¿¿$

2. *Вычислить* $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x^3}^{x} (x-y)\,dy$.

Вариант №6.

1. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx$.

2. *Вычислить* $\iint\limits_{D} y\ln x\,dxdy$, *если область* D *ограничена линиями* $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

Вариант №7.

1. $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} (y-1)\,dy$.

2. *Вычислить* $\iint\limits_{D} (\cos 2x+\sin y)\,dxdy$, *если* D *ограничена линиями* $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$.

Вариант №8.

1. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{4} (y+1)\,dy$.

2. *Вычислить* $\iint\limits_{D} (3x+y)\,dxdy$, *если область* D *определяется неравенствами* $x^2+y^2\le 9$, $y\ge \frac{2}{3}x+3$

Вариант №9.

1. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x-1}^{x+2} (y-2)\,dy$.

2. *Вычислить* $\iint\limits_{D} \sin(x+y)\,dxdy$, *еслиобласть* D *ограничена линиями* $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y=x$.

Вариант №10.

1. $\int\limits_{1}^{0} dx \int\limits_{x-4}^{x} (y+3)\,dy$.

2. *Вычислить* $\iint\limits_{D} x\,dxdy$, *если обасть* D *– треугольник с вершинами* $A(2;3)$, $B(7;2)$, $C(4;5)$.

Контрольные вопросы

1. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x}{4}-1}^{2-x} f(x;y)\,dy;$

б) $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x;y)\,dy;$

в) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x;y)\,dy.$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- тему и цель работы;

- перечень оборудования;

- практическая часть по варианту;

- ответы на контрольные вопросы;

- вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 19

Приложение двойных интегралов.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научиться находить площади и объемы тел при помощи двойного интеграла.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка, калькулятор.

Краткая теория

Площади плоской фигуры, ограниченной областью D, находятся по формуле

$$S=\iint_D dxdy$$

Если область D определена, например, неравенствами $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ то

$$S=\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy$$

Если область D в полярных координатах определена неравенствами $\alpha \le \theta \le \beta$, $f_1(\theta) \le \rho \le f_2(\theta)$, то

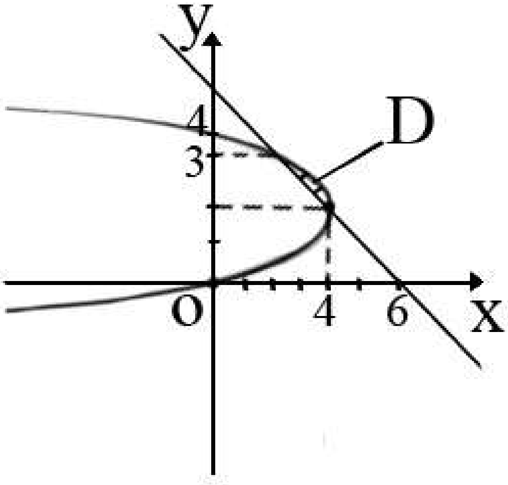
$$S=\iint_D \rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} \rho d\rho$$

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $f(x,y)$ снизу $z=0$ и сбоку поверхностью, вырезающей на плоскости xOy области D, вычисляется по формуле:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

Примеры решений задач.

Пример 1.



1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

Решение.

Построим графики заданных функций.

$4y - y^2 = 0 \qquad y_b = \frac{-4}{-2} = 2$

$x_b = 8 - 4 = 4$

y(4-y)=0 $\quad y_1 = 0 \qquad y_2 = 4$

Найдем точки пересечения графиков функции:

$$\begin{cases} x = 4y - y^2 \\ x = 6 - y \end{cases}$$

$6 - y = 4y - y^2$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

$y_1 = 2 \quad y_2 = 3$

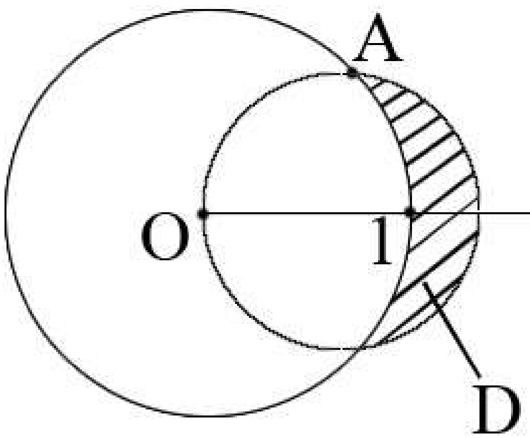
$x_1 = 4 \quad x_2 = 3$

$$S = \iint_D dxdy$$

$$S = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 (4y - y^2 - 6 + y)\,dy = \left(\frac{5y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - 6y\right)\Big|_2^3 = \frac{45}{2} - 9 - 18 - \left(10 - \frac{8}{3} - 12\right) = \frac{45}{2} - 27 + 2 + \frac{8}{3}$$

Пример 2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 1$, $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}} cos\varphi$ (вне окружности $\rho = 1$)



Решение.

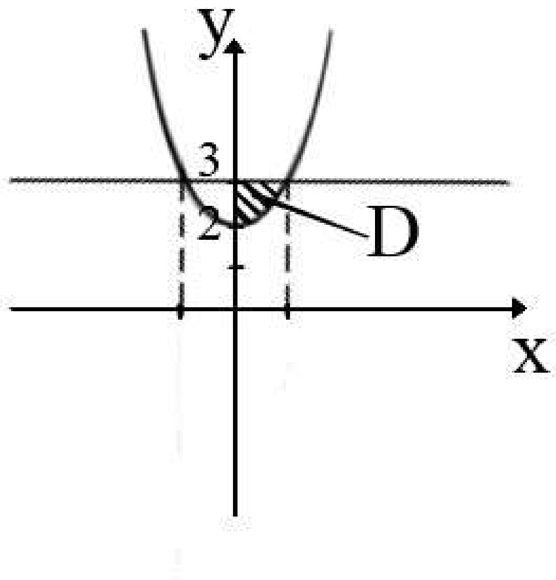
Данному условию соответствует показанный рисунок. Найдем координаты точки А; имеем

$1=\frac{2}{\sqrt{3}}cos\varphi$, $cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$, т.е. $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$. Тогда

$$S=\iint_D \rho d\rho\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi=\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}cos\varphi}\rho d\rho=¿\,2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)\Bigg|_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}cos\varphi} d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{4}{3}\cos^2\varphi-1\right)d\varphi=¿\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cos 2\varphi-1\right)d\varphi=$$

Пример 3.

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=2+x^2$, $z=5x$, $y=3, z=0$ и расположенного в 1 октанте.



Решение.

Построим проекции поверхностей, ограничивающих тело на плоскости xOy.

$$V=\iint_{D}^{\square} f(x,y)\,dxdy$$

$$V=\int_{2}^{3} dy \int_{0}^{\sqrt{y-2}} 5xdx=5\int_{2}^{3}\frac{x^2}{2}¿¿$$

$$¿\frac{5}{2}\left(\frac{y^2}{2}-2y\right)\Bigg|_{2}^{3}=\frac{5}{2}\left(\frac{9}{2}-6\right)-\frac{5}{2}(2-4)=\frac{5}{2}\left(\frac{9}{2}-4\right)=\frac{5}{4}\left(e\partial^2\right)$$

Практическая часть

Вариант 1.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$x=y^2-2y,\quad x+y=0$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

z=0, z=2x, $x=\sqrt{\frac{y}{z}}$

Вариант 2.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$y^2=2x,\ y^{\square}=-x+2$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

x=0, y=0, z=0, $x+y=2,\ y=\sqrt{1-z}$

Вариант 3.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$y^2+2y+1=1, x-y=7$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$z=0, z=1-y, y=x^2$

Вариант 4.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$y=4x-x^2, y=2x^2-5x$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$z=0, z=1-x^2, y=0, y=3-x$

Вариант 5.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$y=2-x, y^2=4x+4$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$z=0, z=2-x, x=1, x=y^2, y=0$

Вариант 6.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$3y^2=25x, 5x^2=9y$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$x=0, y=0, z=0, x+y=1, z=x^2+3y^2$

Вариант 7.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$y=cosx, y=\cos 2x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$x=0, y=0, z=0, x=1, x+y=2, z=x^2+\frac{1}{2}y^2$

Вариант 8.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$x=4-y^2, x+2y-4=0$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$x=0, y=0, z=0, y+z=1, x=y^2+1$

Вариант 9.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$y=-x^2+4, 2x-y+1=0$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$z=0, x=0, y=0, z=1-y^2, x=y^2, x=2y^2+1$

Вариант 10.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной заданными линиями

$xy=1, y=x^2, y=0, y=4$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$z=0, x=0, y=0, z=\sqrt{1-y}, y=x^2, x+y=2$

Контрольные вопросы

1. Напишите формула перехода от декартовых координат к полярным.
2. Назовите правила вычисления двойного интеграла.
3. В чем состоит геометрический смысл двойного интеграла.

Содержание отчета

Отчёт о проделанной работе должен содержать:
-тему и цель работы;
-перечень оборудования;
-практическая часть по варианту;
-ответы на контрольные вопросы;
-вывод.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Описание практического занятия № 20

Исследование числовых рядов на сходимость.

(наименование практического занятия)

по учебной дисциплине (МДК, ПМ) Элементы высшей математики
(наименование учебной дисциплины (МДК, ПМ)

Цель: научиться применять необходимое условие и достаточные признаки для исследования на сходимость числовых знакоположительных рядов, а также применять признак Лейбница для исследования знакопеременных рядов.

Перечень оборудования: учебная литература, тетрадь, ручка калькулятор.

Краткая теория

Выражение $U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots$ называется бесконечным числовым рядом, а числа $U_1,U_2,U_3,\ldots,U_n,\ldots$ числами ряда.

Ряд называют сходящимся, если его n-ая частичная сумма S_n при неограниченном возрастании т стремится к конечному пределу, т.е. если:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Необходимое условие сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

Достаточным признаками сходимости рядов является два признака сравнения, радикальный и интегральный признак Кали и признак Даламбера.

Если знаки членов ряда чередуются, то ряд называется знакочередующимся:

$U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots+(-1)^{n-1}U_n+\ldots$, где $U_n>0(n=1,2,3,\ldots)$.

Для исследования знакопеременных рядов на сходимость применяют признак Лейбница.

Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю, т.е. если выполняются два условия:1)$U_1>U_2>U_2\ldots$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

Для рядов с произвольным чередованием знаков существуют понятия абсолютной и условной сходимости.

Знакопеременный ряд является абсолютно сходящимся, если для него выполняются условия Лейбница и ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Примеры решения задач

Исследовать ряды на сходимость:

1) $\frac{1}{5}-\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}-\frac{10}{5^4}+\frac{13}{5^5}-\frac{16}{5^6}+\dots$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{5^n-1}$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{4n-1}\right)^n$

Решение.

1) Данный ряд является знакопеременным, исследуем его по признаку Лейбницу. Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\frac{10}{5^4}+\dots+\frac{3n-2}{5^n}+\dots$$

Проверим первое условие:

$\frac{1}{5}>\frac{4}{25}>\frac{7}{125}>\frac{10}{625}>\dots$ $\Rightarrow$ выполняется второе условие:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\ln 5\cdot 5^{n}}=0$ $\Rightarrow$ выполняется.

Исследуем теперь ряд, составленный из абсолютных величин по признаку Даламбера.

$$U_n = \frac{3n-2}{5^n},\ U_{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{5^{n+1}} = \frac{3n+1}{5^n \cdot 5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)\cdot 5^n}{5^n \cdot 5(3n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{3n-2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} \frac{3}{3} = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow$$

ряд сходится. Исходный ряд сходится и притом абсолютно.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + 1}$ (1)

Сравним данный ряд с рядом:

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$, который является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Каждый знаменатель членов исходного ряда (1) на 1 больше знаменателя соответствующего члена ряда(2), значит сам член исходного ряда меньше. А поскольку бесконечно убывающая геометрическая прогрессия является сходящимся рядом, то и исходный ряд сходится по первому признаку сравнения.

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{4^{n-1}}\right)^n$

Исследуем данный ряд по радикальному признаку Каши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{4^{n-1}}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{4^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)' \cdot 4^{n-2}} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

При нахождении пределов во всех задачах использовалось правило

Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

Исследуем ряд по интегральному признаку Каши:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{2n-1}dn=\left|\begin{matrix}2n-1=t\\ 2dn=dt\\ n=1\ \ t=1\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\ln t\Big|_1^{\infty}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\ln t-\frac{1}{2}\ln 1=\infty-0=\infty\Rightarrow \text{ряд расходится}$$

Практическая часть

Вариант № 1

Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n-1)}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^{2n}n^5$

3) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n-2}{3n-1}$

Вариант № 2

Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+1}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n-1}{5n^2+2n-1}\right)^n$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} \cdot \left(1+\frac{n}{10^n}\right)$

Вариант № 3

Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n+1}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+(0{,}1)^{n+2} n$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-2)}{n^2+n+1}$

Вариант № 4

Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^{2n}\frac{1}{n^{5}}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{3}}$

Вариант № 5

Исследовать ряды на сходимость:

1) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^{2}}+\frac{13}{10^{3}}+\frac{19}{10^{4}}+\frac{25}{10^{5}}+\frac{31}{10^{6}}+\cdots$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n}}{2n-5}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}+1}$

Вариант № 6

Исследовать ряды на сходимость:

1) $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n-1}}$

Контрольные вопросы

1. Что называется суммой ряда?

2.Сформулируйте свойство сходящихся рядов.

3.Сформулируйте достаточные признаки, которыми Вы пользовались при решении задач.

Содержание отчёта

Отчёт о проделанной работе должен содержать:

- тему и цель работы,

- перечень оборудования,

- краткие теоретические сведения,

- практическую часть по варианту,

- ответы на контрольные вопросы

- вывод.